Тема 3

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Лекция 3.1. Векторы

План

1. *Вектор. Линейные операции над геометрическими векторами.*
2. *Проекция вектора на ось. Разложение вектора по ортам координатных осей.*
3. *Действия над векторами в координатной форме.*

Прогноз погоды: «Ветер северо-западный, скорость 20 метров в секунду». Согласитесь, и направление ветра (откуда он дует), и модуль его скорости (абсолютная величина) имеют значение.

Величины, определяемые только числовым значением и не имеющие направления, называются **скалярными**. Масса, работа, температура никуда не направлены и для них важно – «сколько».

Величины, имеющие не только абсолютное значение, но и направление, называются **векторными**. Скорость, сила, ускорение – векторы. Для них важно «сколько» и важно «куда».

1. Вектор. Линейные операции над геометрическими векторами

Геометрический вектор (от лат. *vector* – несущий) – это отрезок определенной длины и направления. Изображается вектор отрезком прямой со стрелкой на конце (рис. 3.1). Вектор обозначают символом $\overrightarrow{AB}$, причем первая буква всегда указывает начало вектора, а вторая – его конец, или одной малой латинской буквой со стрелочкой над ней $\vec{a}$.

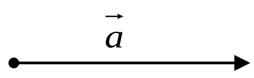

Рис. 3.1

Длина (модуль) вектора $\overrightarrow{AB}$ – это число, равное длине отрезка $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Вектор называется **нулевым**, если его модуль равен нулю и обозначается $\vec{0}$. Вектор называется **единичным**, если его модуль равен единице. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется **ортом вектора** $\overrightarrow{e_a}$. Единичные векторы, выходящие из начала координат и расположенные на координатных осях, называются **координатными ортами** и обозначаются $\vec{i}$; $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Записывают $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково (**сонаправленные** векторы $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) или противоположно (**противоположные** векторы $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **равными**, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Пишут $\vec{a} = \vec{b}$.

Угол φ **между векторами** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это угол между их направлениями $(0 \le \varphi \le 180)$.

Линейные операции над геометрическими векторами

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора. Для сложения двух векторов используют **правил треугольника** (рис. 3.2*а* и 3.2*б*) и **правило параллелограмма** (рис. 3.2*г*). Сумму нескольких векторов можно найти так, как показано на рис. 3.2*в*.

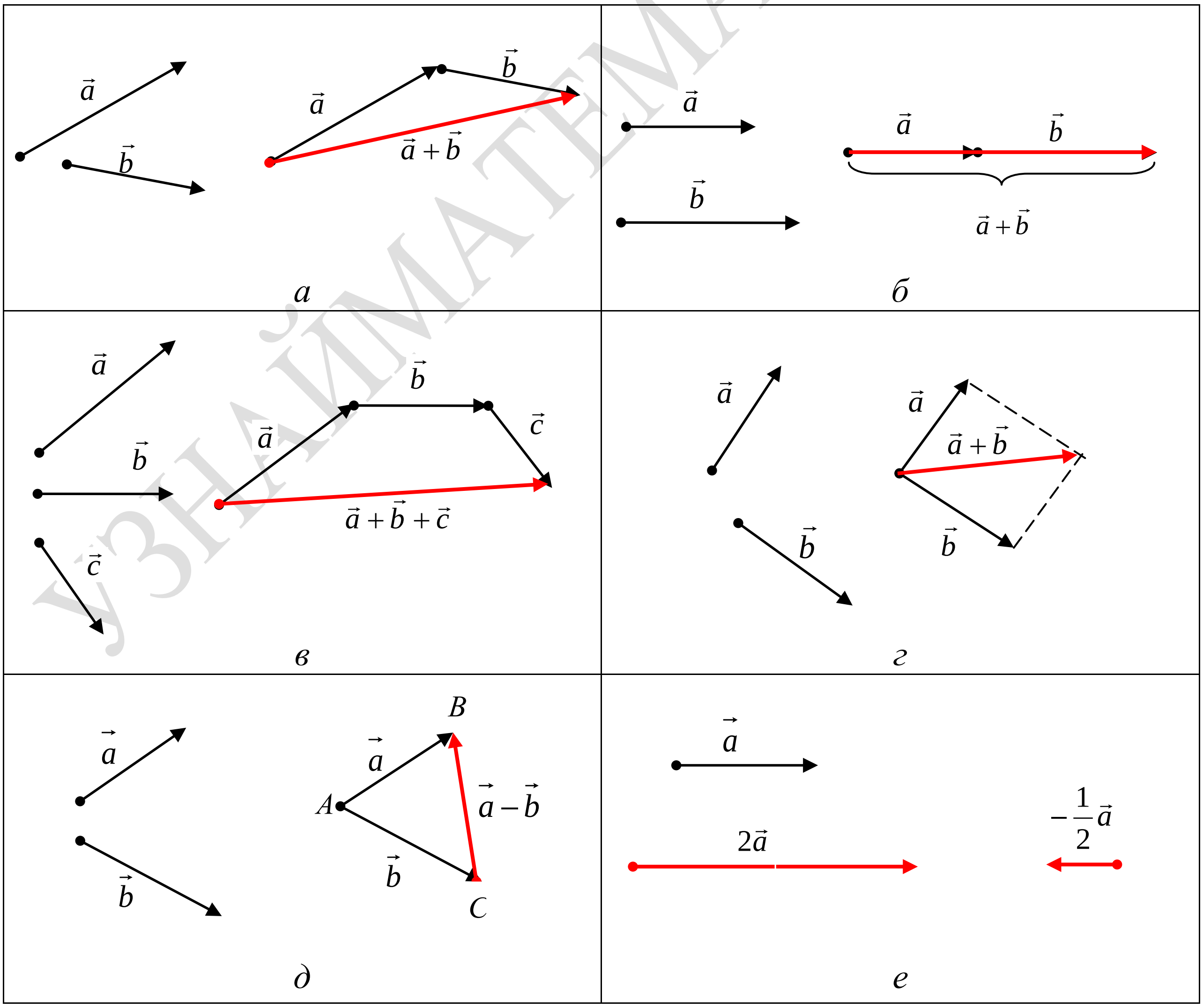

Рис. 3.2

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Вектор $\vec{a} - \vec{b}$ строят так, как показано на рис 3.2*д*.

Произведением вектора $\vec{a}$ **на действительное число** $\lambda \neq 0$ называется вектор $\lambda\vec{a}$, который:

1) коллинеарен вектору $\vec{a}$;

2) имеет длину, равную $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

имеет то же направление, что и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и направление противоположное направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$ (рис. 3.2*е*).

2. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по ортам координатных осей

Пусть дан вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось x. Из начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$ опустим перпендикуляры на ось x; пусть A_1 и B_1 – основания этих перпендикуляров (рис. 3.3). Длину отрезка A_1B_1 обозначим $|A_1B_1|$.

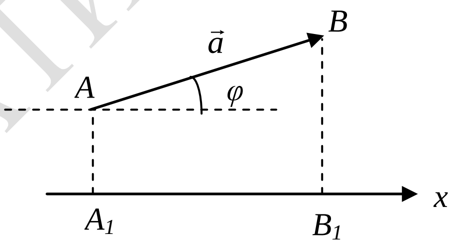

Рис. 3.3

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось x называется **число**, равное длине отрезка A_1B_1, взятое со знаком плюс, если угол φ между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью x является острым, и взятый со знаком минус, если угол φ – тупой.

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось x обозначается так:

$$\text{пр}_x \overrightarrow{AB} = \text{пр}_x \vec{a} = a_x.$$

Кратко имеем формулу

$$\text{пр}_x \overrightarrow{AB} = \begin{cases} |A_1B_1|, & \text{если} \quad \varphi < 90^\circ \\ -|A_1B_1|, & \text{если} \quad \varphi > 90^\circ \\ 0, & \text{если} \quad \varphi = 90^\circ \end{cases}$$

Рисунок 3.4 иллюстрирует все эти возможности

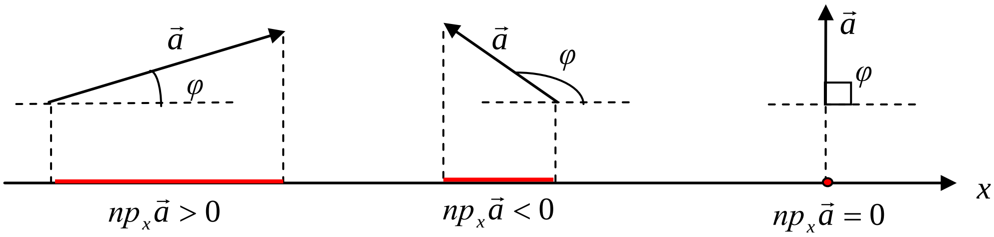

Рис. 3.4

Основные свойства проекций

1) проекция вектора $\vec{a}$ на ось x равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, то есть $np_x\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\varphi$.

2) проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось (рис. 3.5).

3) при умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция на ось так же умножается на это число, то есть $np_x\left(\lambda\vec{a}\right) = \lambda np_x\vec{a}$.(рис. 3.6).

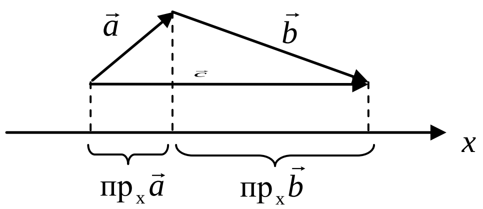

Рис. 3.5

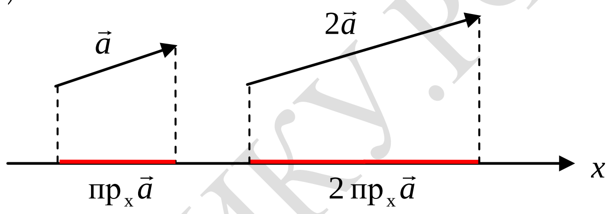

Рис. 3.6

Теорема 3.1. Любой вектор трехмерного пространства может быть единственным образом разложен по ортам координатных осей, то есть

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{или} \quad \vec{a} = \left\{a_x; a_y; a_z\right\}, \tag{3.1}$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат Ox, Oy, Oz соответственно.

Формула (3.1) называется **разложением вектора $\vec{a}$ по координатным ортам**, а числа a_x, a_y, a_z – **координатами** вектора. На рис. 3.7 изображен вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, на рис. 3.8 – вектор $\vec{a} = \left\{a_x; a_y\right\}$.

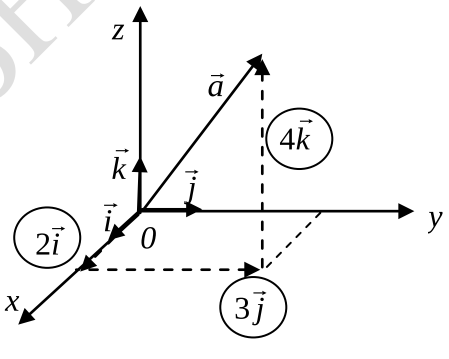

Рис. 3.7

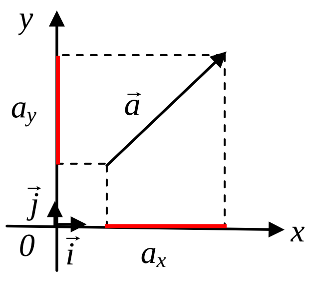

Рис. 3.8

Длина вектора $\vec{a} = \left\{a_x; a_y; a_z\right\}$ будет вычисляться по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}, \tag{3.2}$$

то есть модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.

Направление вектора $\vec{a}$ определяется углами $\alpha, \beta, \gamma,$ которые он образует с осями Ox, Oy, Oz соответственно. По свойству проекции вектора на ось

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \tag{3.3}$$

Числа $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{a}$ и являются координатами его орта $\vec{e}_a = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$.

3. Действия над векторами в координатной форме

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ или, что то же самое, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k};\ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Равенство векторов

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда выполняется равенство их одноименных координат, то есть

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases} \tag{3.4}$$

Линейные операции над векторами

1. Сложение (вычитание) векторов $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}$ или $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$, то есть каждая координата суммы (разности) двух и более векторов равна сумме (разности) одноименных координат векторов.

2. Умножение вектора на число $\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}$ или $\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}$, то есть каждая координата произведения вектора на число равна произведению каждой координаты вектора на это число.

Коллинеарность векторов

Теорема 3.2. Координаты коллинеарных векторов пропорциональны, то есть

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.} \qquad (3.5)$$

□ Так как $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то можно записать $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, где λ – некоторое число. По условию равенства векторов:

$$a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \lambda\left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right) = \lambda b_x \vec{i} + \lambda b_y \vec{j} + \lambda b_z \vec{k}.$$

Отсюда $\begin{cases} a_x = \lambda b_x, \\ a_y = \lambda b_y, \\ a_z = \lambda b_z, \end{cases}$

то есть $\dfrac{a_x}{b_x} = \lambda$, $\dfrac{a_y}{b_y} = \lambda$, $\dfrac{a_z}{b_z} = \lambda$ или $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$. ■

Координаты вектора через координаты начала и конца

Пусть известны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, тогда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}\right) - \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}\right) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Следовательно, координаты вектора равны разности соответствующих координат его конца и начала:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.} \qquad (3.6)$$

<u>*Пример 3.1*</u>. Даны два вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \{-4; 5; 1\}$. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$.

<u>*Решение*</u>. По условию имеем: $\vec{a} = \{3; 5; -2\}$ и $\vec{b} = \{-4; 5; 1\}$. Тогда координаты вектора $\vec{c}$ равны: $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b} = \{3; 5; -2\} - 3\{-4; 5; 1\} = \{15; -10; -5\}$. Длина вектора $\vec{c}$ равна $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{15^2 + (-10)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{14}$. Направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{15}{5\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{-10}{5\sqrt{14}} = \frac{-2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{5}{5\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

<u>*Пример 3.2*</u>. Даны вершины треугольника $A(2;\ 1;\ -3)$, $B(5;\ 0;\ -4)$ и $C(7; 4; -2)$. Найти: а) координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину; б) длину медианы $\overrightarrow{AM}$.

<u>*Решение.*</u> а) Координаты вектора

$\overrightarrow{AB} = \{5-2;\ 0-1;\ -4-(-3)\} = \{3;\ -1;\ -1\}$;

длина $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$.

б) 1-й способ. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Координаты $\overrightarrow{AB} = \{3;\ -1;\ -1\}$; $\overrightarrow{BC} = \{2;\ 4;\ 2\}$. Тогда координаты $\overrightarrow{AM} = \{3;\ -1;\ -1\} + \frac{1}{2}\{2;\ 4;\ 2\} = \{4;\ 1;\ 0\}$.

2-й способ. Так как M – середина отрезка BC, то координаты точки $M\left(\frac{5+7}{2};\ \frac{0+4}{2};\ \frac{-4-2}{2}\right) = M(6;\ 2;\ -3)$. Значит, вектор-медиана $\overrightarrow{AM} = \{4;\ 1;\ 0\}$. Длина $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{17}$.

Кроме линейных операций, существуют различные произведения векторов: скалярное, векторное, смешанное.

Лекция 3.2. Нелинейные операции над векторами. Линейная независимость векторов и базис пространства

План

1. *Скалярное произведение векторов.*
2. *Векторное произведение векторов.*
3. *Линейная зависимость и линейная независимость векторов, базис.*

1. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *число*, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$. Итак, по определению

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,} \qquad (3.7)$$

где φ – угол между векторами, $\varphi \in [0;\pi]$.

Приведем некоторые свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$;

3) $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\vec{b},\ \lambda \in R$;

4) $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$; 5) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$, ($\vec{a} \ne 0$, $\vec{b} \ne 0$), то есть скалярное произведение двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они ортогональны.

Теорема 3.3. Если векторы $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.} \qquad (3.8)$$

□ Данная формула легко получается, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ записать в виде $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ и перемножить их по правилу умножения многочленов, используя очевидные равенства: $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$; $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.■

Замечание. Обозначим проекцию вектора $\vec{b}$ на ось, сонаправленную вектору $\vec{a}$, через $np_{\vec{a}}\vec{b}$. Так как $np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$, тогда из формулы определения скалярного произведения получаем $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = |\vec{a}| np_{\vec{a}} \vec{b}$, откуда

$$\boxed{np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}.} \qquad (3.9)$$

Это число называют **проекцией вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$**.

<u>*Пример 3.3.*</u> Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Найти: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\left(3\vec{a} - \vec{b}\right)\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$.

<u>*Решение.*</u> Используя определение и свойства скалярного произведения:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\dfrac{\pi}{3} = 3 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 3$;

б) $\left(3\vec{a} - \vec{b}\right)\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) = 6\vec{a}^2 - 3\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}\vec{a} + \vec{b}^2 = 6 \cdot 9 - 5 \cdot 3 + 4 = 43$.

Отметим возможность применения скалярного произведения в физике: работа A постоянной силы $\vec{F}$ при прямолинейном перемещении $\vec{S}$ ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$.

<u>*Пример 3.4.*</u> Найти работу силы $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ при перемещении точки $M_1(-2; -1; 5)$ в точку $M_2(3; 0; -1)$.

<u>*Решение*</u>. Используя формулу координат вектора по известным началу и концу и формулу работы, имеем:

$\overrightarrow{M_1M_2} = \{3 - (-2); 0 - (-1); -1 - 5\} = \{5; 1; -6\}$;

$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-6) = 13$.

2. Векторное произведение векторов

Пусть даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ **на вектор** $\vec{b}$ называется *вектор* $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу, как на сторонах, то есть $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ происходящим против часовой стрелки (в этом случае говорят, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют **правую упорядоченную тройку векторов**).

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a} \times \vec{b}$.

Приведем некоторые свойства векторного произведения.

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;
3. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$, $\quad \lambda \in R$;
4. $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$, $(\vec{a} \neq 0, \quad \vec{b} \neq 0)$.

Теорема 3.4. Если $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}. \qquad (3.10)$$

<u>*Пример 3.5*</u>. Даны два вектора $\vec{a} = \{2; -1; 3\}$ и $\vec{b} = \{0; 4; -1\}$. Найти $\vec{a} \times \vec{b}$ и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

<u>*Решение*</u>. По теореме 3.4 получаем

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k}.$$ Значит, $\vec{a} \times \vec{b} = \{-11; 2; 8\}$.

По условию (1) определения векторного произведения площадь параллелограмма $S_{парал} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{(-11)^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{189}$ кв. ед.

3. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Пусть даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ называется вектор $\vec{a}$ вида

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – числа.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ называются **линейно зависимыми,** если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не равные нулю одновременно, что справедливо равенство

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \lambda_3 \overrightarrow{a_3} = \vec{0}.$$

Например, векторы $\overrightarrow{a_1} = \{2;\ 2;\ 3\}$; $\overrightarrow{a_2} = \{0;\ -4;\ 5\}$; $\overrightarrow{a_3} = \{3; 13;\ -8\}$ линейно зависимы, так как при $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -5, \lambda_3 = -2$ получаем равенство

$$3\vec{a}_1 - 5\overrightarrow{a_2} - 2\overrightarrow{a_3} = \{6;\ 6;\ 9\} - \{0;\ -20;\ 25\} - \{6;\ 26;\ -16\} = \vec{0}.$$

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ называются **линейно независимыми,** если равенство $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \lambda_3 \overrightarrow{a_3} = \vec{0}$ возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Базисом в двумерном пространстве называется любая пара линейно независимых векторов. **Базисом в трехмерном пространстве** называется любая тройка линейно независимых векторов. **Базисом в *n*-мерном пространстве** называется любая совокупность n линейно независимых векторов.

Теорема 3.5. Вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$; $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$; $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$ образуют базис в трехмерном пространстве тогда и только тогда, когда определитель, строки (столбцы) которого являются координатами векторов, отличен от нуля, то есть $\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \neq 0.$

Теорема 3.6. Любой вектор трехмерного пространства можно представить единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса данного пространства.

Представление $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$ называется **разложением вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$.**

<u>*Пример 3.6.*</u> Показать, что векторы $\vec{a} = \{2; 1; 3\}$; $\vec{b} = \{-1; 4; 0\}$; $\vec{c} = \{2;\ -2;\ 3\}$ образуют базис и разложить вектор $\vec{d} = \{7; -7; 9\}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Решение. Составим определитель из координат векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$. Значит, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис. Запишем разложение вектора $\vec{d} = \{7;-7;9\}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в координатной форме:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 7 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = -7. \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_3 = 9 \end{cases}$$

По формулам Крамера: $\Delta = 9$; $\Delta_{\lambda_1} = 9$; $\Delta_{\lambda_2} = -9$; $\Delta_{\lambda_3} = 18$.

Значит, $\lambda_1 = \dfrac{9}{9} = 1$; $\lambda_2 = \dfrac{-9}{9} = -1$; $\lambda_3 = \dfrac{18}{9} = 2$. Таким образом, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$.

Все определения и теоремы, приведенные выше, справедливы и для n-мерных векторов.