Тема 4

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Лекция 4.1. Прямые на плоскости

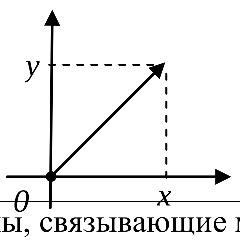
П л а н

1. Метод координат на плоскости.
2. Прямая в декартовых координатах.
3. Условие параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.

Аналитическая геометрия – это область математики, в которой геометрические задачи решаются и изучаются средствами алгебры на основе метода координат, созданного Р. Декартом[1].

1. Метод координат на плоскости

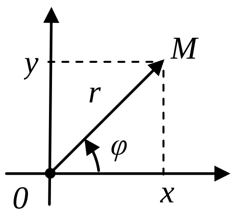
Система координат – способ, позволяющий численно описать положение точки. Рассмотрим две системы координат на плоскости – *прямоугольную (декартова) и полярную*.

Прямоугольная система координат	**Полярная система координат**
Положение точки M определяется координатами радиус-вектора $\overrightarrow{OM} = \{x; y\}$, где x – **абсцисса**, y – **ордината** точки M. Абсцисса и ордината составляют **прямоугольные координаты** точки M и записываются $M(x; y)$.  	Положение точки M определяется расстоянием r (**полярный радиус**) от точки M до полюса O (то есть $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$) и углом φ (**полярный угол**) между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$. Полярный радиус и полярный угол составляют **полярные координаты** точки M и записываются $M(r; \varphi)$.
Формулы, связывающие между собой прямоугольные координаты x, y точки M	

[1] Рене Декарт (1596 –1650) – французский философ, математик, механик физик и физиолог. Создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики.

и ее полярные координаты r, φ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Пример 4.1. Найти: а) прямоугольные координаты точки $M_1\left(4; \dfrac{3\pi}{4}\right)$; б) полярные координаты точки $M_2\left(-1; \sqrt{3}\right)$.

Решение. а) По формулам имеем:

$$x = 4\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}; \quad y = 4\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Итак, $M_1\left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$.

б) По формулам имеем:

$r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2;$ $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2};$ $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

Итак, $M_2\left(2; \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Приложения метода координат на плоскости

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ определяется по формуле $\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$ (рис. 4.1).

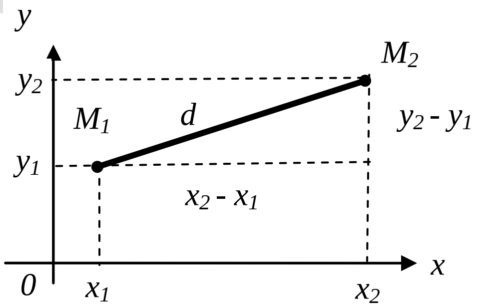


Рис. 4.1

Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ и пусть т. $M(x; y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то есть так, что отношение длины отрезка M_1M к длине отрезка MM_2 равно λ: $\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda$. Координаты точки деления $M(x; y)$ вычисляются по формулам:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.} \tag{4.1}$$

Замечание. Формулы деления отрезка пополам (M – середина отрезка M_1M_2, а значит, $\lambda = 1$) имеют вид:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.} \tag{4.2}$$

2. Прямая в декартовых координатах

1. **Общее уравнение прямой** на плоскости – уравнение

$$\boxed{Ax + By + C = 0,} \tag{4.3}$$

A, B, C – произвольные числа такие, что A и B не равны нулю одновременно, x, y – текущие координаты.

Расположение прямой на плоскости в случае равенства нулю некоторых из коэффициентов A, B, C:

Значения коэффициентов	Уравнение прямой	Расположение прямой на плоскости
$C = 0,\ B = 0,\ A \neq 0$	$Ax = 0$, то есть $x = 0$	ось Oy
$C = 0,\ A = 0,\ B \neq 0$	$By = 0$, то есть $y = 0$	ось Ox
A – любое, $C = 0,\ B \neq 0$	$y = -\dfrac{A}{B}x$	проходит через начало координат
C – любое, $A = 0,\ B \neq 0$	$y = -\dfrac{C}{B}$	прямая $\parallel Ox\ (\perp Oy)$
C – любое, $B = 0,\ A \neq 0$	$x = -\dfrac{C}{A}$	прямая $\parallel Oy\ (\perp Ox)$

2. **Уравнение прямой в отрезках**

Предположим, что в уравнении (4.3) все коэффициенты отличны от нуля. Проведем следующие преобразования:

$Ax + By + C = 0,$ разделим обе части уравнения на $(-C)$.

$$Ax + By = -C,$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1,$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Положим: $a = -\dfrac{C}{A}$; $b = -\dfrac{C}{B}$.

Тогда **уравнение прямой в отрезках:**

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \qquad (4.4)$$

Коэффициенты a и b определяют отрезки на осях координат, отсекаемые данной прямой от начала координат (рис. 4.2).

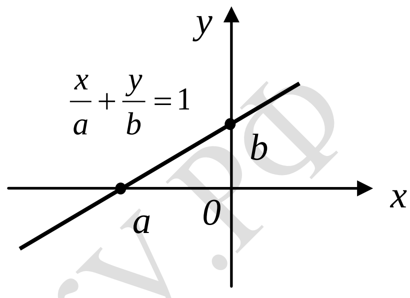


Рис. 4.2

3. **Уравнение прямой с угловым коэффициентом**

Пусть в уравнении (4.3) коэффициент $B \neq 0$. Выразим y через x и получим $By = -Ax - C$, разделим обе части уравнения на B.

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

Положим: $k = -\dfrac{A}{B}$; $b = -\dfrac{C}{B}$. Тогда **уравнение прямой с угловым коэффициентом:**

$$\boxed{y = kx + b} \qquad (4.5)$$

Число k называют **угловым коэффициентом,** и оно равно тангенсу угла α (рис. 4.3) между положительным направлением оси Ox и прямой. В самом деле

$$tg\alpha = \frac{y-b}{x} = \frac{kx+b-b}{x} = \frac{kx}{x} = k.$$

Из рисунка 4.3 видно, что свободный член b играет роль ординаты точки пересечения прямой с осью Oy.

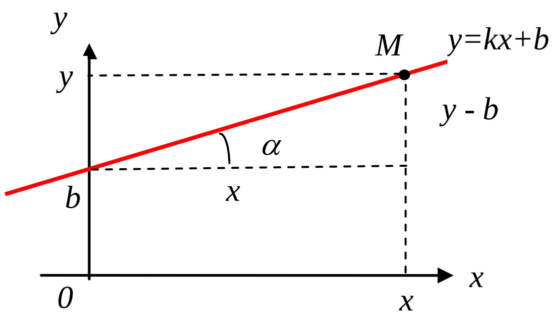


Рис. 4.3

4. **Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении**

Пусть прямая проходит через точку $M(x_1;y_1)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом *k*.

Уравнение этой прямой: $y = kx + b$, где b – пока неизвестная величина. Так как прямая проходит через точку $M(x_1;y_1)$, то координаты точки удовлетворяют уравнению прямой: $y_1 = kx_1 + b$. Отсюда $b = y_1 - kx_1$. Подставляя значение b в уравнение $y = kx + b$, получим искомое уравнение прямой $y = kx + y_1 - kx_1$, то есть

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1),} \qquad (4.6)$$

называемое **уравнением прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении.**

Данное уравнение с различными значениями k называют также **уравнением пучка прямых** с центром в точке $M(x_1;y_1)$.

5. **Уравнение прямой, проходящей через две точки**

Пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. Ее угловой коэффициент (рис. 4.4)

$$k = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

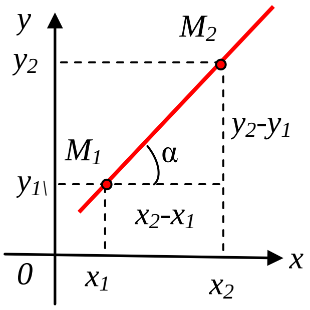


Рис. 4.4

Подставив коэффициент и координаты точки $M_1(x_1;y_1)$ в уравнение (4.6), выведем уравнение

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},} \qquad (4.7)$$

называемое **уравнением прямой, проходящей через две точки.**

Если $x_1 = x_2$, то есть точки M_1 и M_2 лежат на одной вертикальной линии, то уравнение (4.7) теряет смысл. В этом случае прямая задается уравнением $x = x_1$. Если $y_1 = y_2$, то прямая задается уравнением $y = y_1$.

3. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости

1. Если даны уравнения двух прямых l_1 и l_2 вида $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, то о взаимном расположении этих прямых на плоскости можно судить по их угловым коэффициентам k_1 и k_2.

Найдем тангенс угла φ $(\varphi \neq \frac{\pi}{2})$, на который надо повернуть прямую l_1 до совпадения с прямой l_2 относительно точки их пересечения (рис. 4.5) по формуле $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

По формуле тангенса разности

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}.$$

Так как $tg\alpha_1 = k_1$ и $tg\alpha_2 = k_2$, то

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},} \qquad (4.8)$$

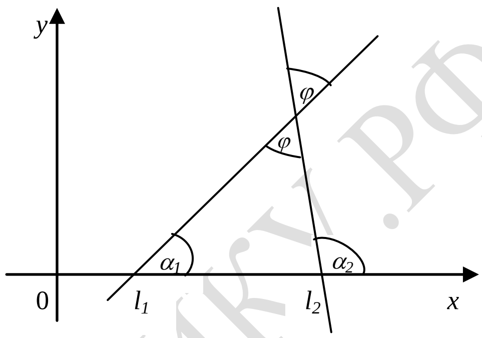


Рис. 4.5

является формулой угла между прямыми.

Выведем из (4.8) условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Если $l_1 \parallel l_2$, то $tg\varphi = 0$, следовательно, **условие параллельности прямых**:

$$\boxed{k_1 = k_2.} \qquad (4.9)$$

Если $l_1 \perp l_2$, то $\varphi = 90^o$, то есть $tg\varphi -$ не существует (равен ∞). Следовательно, **условие перпендикулярности прямых:**

$$\boxed{k_1 k_2 = -1} \text{ или } \boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}.} \qquad (4.10)$$

<u>*Пример 4.3.*</u> Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(4, 3)$, $B(16, -6)$, $C(20, 16)$. Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты; 3) угол B в радианах; 4) уравнение высоты CD и ее длину; 5) уравнение медианы AM и координаты точки K пересечения этой медианы с высотой CD; 6) уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно стороне AB.

<u>*Решение.*</u> 1) Расстояние между точками определяется по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Применяя ее, находим длину стороны AB:

$$|AB| = \sqrt{(16-4)^2 + (-6-3)^2} = \sqrt{144 + 81} = 15.$$

2) Уравнение прямой проходящей через две точки имеет вид $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Подставляя координаты точек A и B, получим уравнение стороны AB:

$$\frac{x-4}{16-4}=\frac{y-3}{-6-3};\ \frac{x-4}{12}=\frac{y-3}{-9};\ \frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{-3};\ 4(y-3)=-3(x-4);$$

$$4y-12=-3x+12;$$

$4y+3x-24=0$ – уравнение AB.

Решив последнее уравнение относительно y, находим уравнение стороны AB в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом: $4y=-3x+24;\ y=-\dfrac{3}{4}x+6$, откуда $k_{AB}=-\dfrac{3}{4}$.

Подставляя координаты точек B и C, получим уравнение стороны BC:

$$\frac{x-16}{20-16}=\frac{y+6}{16+6};\ \frac{x-16}{4}=\frac{y+6}{22};\ \frac{x-16}{2}=\frac{y+6}{11};\ 2(y+6)=11(x-16);$$

$$2y+12=11x-176;$$

$2y-11x+188=0$ или $y=5{,}5x-94=0$ – уравнение BC.

Откуда $k_{BC}=5{,}5$.

3) Известно, что тангенс угла между двумя прямыми, угловые коэффициенты, которых соответственно равны k_1 и k_2, вычисляется по формуле $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Искомый угол B образован прямыми AB и BC, угловые коэффициенты которых найдены: $k_{AB}=-\dfrac{3}{4}$ и $k_{BC}=5{,}5$. Применяя формулу, получим $tg\varphi=\dfrac{-\frac{3}{4}-5{,}5}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)5{,}5}=2$.

$B\approx 63^\circ$ или $B\approx 1{,}11$ рад.

4) Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, имеет вид $y-y_1=k(x-x_1)$. Высота CD перпендикулярна стороне AB. Чтобы найти угловой коэффициент высоты CD, воспользуемся условием перпендикулярности прямых. Так как $k_{AB}=-\dfrac{3}{4}$, то $k_{CD}=\dfrac{4}{3}$. Подставив в уравнение координаты точки $C(20,16)$ и найденный угловой

коэффициент высоты $k_{CD} = \frac{4}{3}$, получим $y - 16 = \frac{4}{3}(x - 20)$; $-3y + 4x - 32 = 0 -$ уравнение *CD*.

Чтобы найти длину высоты *CD*, определим сперва координаты точки D – точки пересечения прямых AB и *CD*. Решая совместно систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 24 = 0, \\ 4x - 3y - 32 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8, \\ y = 0. \end{cases} \quad \text{То есть } D(8,\, 0).$$

По формуле находим длину высоты CD:

$$|CD| = \sqrt{(20-8)^2 + (16-0)^2} = 20.$$

5) Чтобы найти уравнение медианы AM, определим сначала координаты точки M, которая является серединой стороны *BC*, применяя формулы деления отрезка на две равные части: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Следовательно, $x_M = \frac{16+20}{2} = 18$; $y_M = \frac{-6+16}{2} = 5$, $M(18,\, 5)$.

Подставив координаты точек $A(4,\, 3)$ и $M(18,\, 5)$ в уравнение прямой, проходящей через две точки, находим уравнение медианы: $\frac{y-3}{5-3} = \frac{x-4}{18-4}$;

$\frac{y-3}{2} = \frac{x-4}{14}$; $-7y + x + 17 = 0 -$ уравнение AM.

Чтобы найти координаты точки пересечения высоты *CD* и медианы AM, решим совместно систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 3y - 32 = 0, \\ x - 7y + 17 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11, \\ y = 4. \end{cases} \quad K(11,\, 4).$$

6) Так как искомая прямая параллельная стороне *AB*, то ее угловой коэффициент будет равен угловому коэффициенту прямой *AB*. Подставив в уравнение прямой координаты найденной точки K и угловой коэффициент $k_{AB} = -\frac{3}{4}$, получим $y - 4 = -\frac{3}{4}(y - 11)$; $4y - 16 = -3x + 33$; $3x + 4y - 49 = 0$ – уравнение прямой KF.

Лекция 4.2. Кривые второго порядка

План

1. *Окружность.*
2. *Эллипс.*
3. *Гипербола.*
4. *Парабола.*
5. *Преобразование уравнений второго порядка к каноническому виду.*

К кривым второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

1. *Окружность*

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра) той же плоскости.

Если точка $C(x_0;y_0)$ – центр, то уравнение окружности

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,} \tag{4.11}$$

где R – радиус окружности; x, y – текущие координаты.

Если центр окружности находится в начале координат, то уравнение окружности имеет вид: $x^2+y^2=R^2$.

Пример 4.3. Составить уравнение траектории точки $M(x;y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1;-1)$, чем к точке $B(-4;-4)$.

Решение. Запишем расстояние от точки $M(x;y)$ до точек A и B:

$|AM|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$ и $|BM|=\sqrt{(x+4)^2+(y+4)^2}$. Так как $2|AM|=|BM|$, то $2\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+4)^2+(y+4)^2}$. Преобразуя это уравнение, получим $x^2+y^2=8$. Это уравнение окружности с центром в $O(0;0)$ и радиусом $R=\sqrt{8}$.

2. *Эллипс*

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (**фокусов**) той же плоскости есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.

Сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов обычно обозначают через $2a$, а расстояние между фокусами – через $2c$. По определению $2a>2c$, то есть $a>c$.

Если оси координат расположены так, что фокусы $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ лежат на оси Ox, а начало координат совпадает с серединой отрезка F_1F_2 (рис. 4.6*а*), то из равенства $|MF_1|+|MF_2|=2a$, где $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса, можно вывести **каноническое** или простейшее **уравнение эллипса**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,}\quad (b^2=a^2-c^2) \text{ и } (a>b). \tag{4.12}$$

Основными элементами эллипса являются:

- центр симметрии $O(0;0)$ – **центр** эллипса;
- оси симметрии Ox и Oy;
- $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ – фокусы;
- точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$; $B_2(0;b)$ – **вершины** эллипса;
- отрезки $A_1A_2=2a$ и $B_1B_2=2b$ – **большая** и **малая ось** эллипса соответственно;
- a и b – **большая** и **малая полуось** эллипса соответственно.

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется **эксцентриситетом** $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Так как $a>c$, то $0\le\varepsilon<1$.

если $\varepsilon\to 0$, то $\frac{b}{a}\to 1 \Rightarrow b\approx a$ и эллипс превращается в окружность;

если $\varepsilon\to 1$, то $\frac{b}{a}\to 0 \Rightarrow b\to 0$ и эллипс «сплющивается» к Ox.

Если $a<b$, то уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ задает эллипс, большая полуось которого равна b и лежит на оси Oy, а малая ось равна a и лежит на оси Ox. Фокусы такого эллипса расположены в точках $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$, где $a^2=b^2-c^2$ (рис. 4.6*б*).

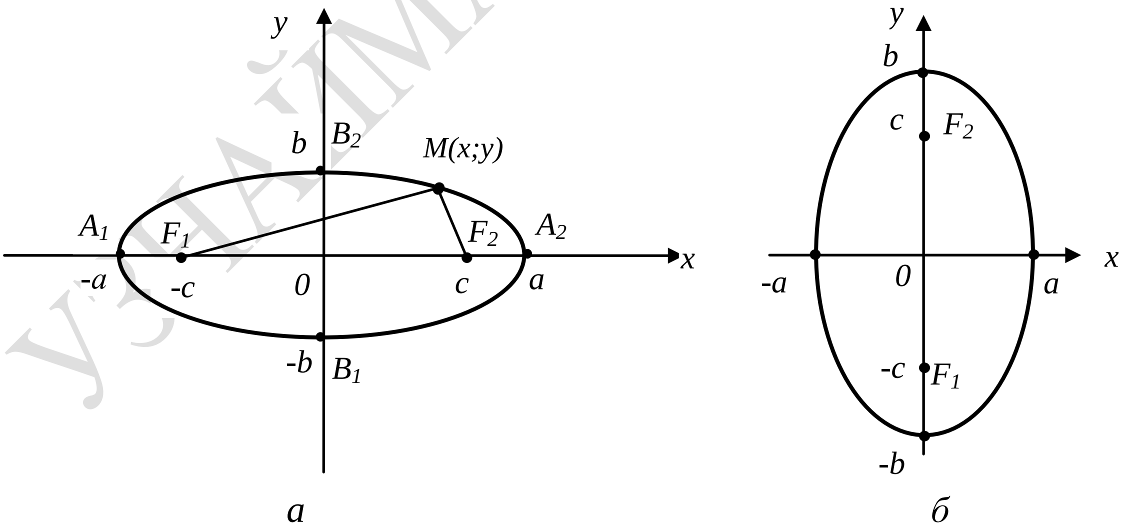


Рис. 4.6

Если центр эллипса находится в точке $C(x_0;y_0)$, а оси параллельны осям координат, то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (4.13)$$

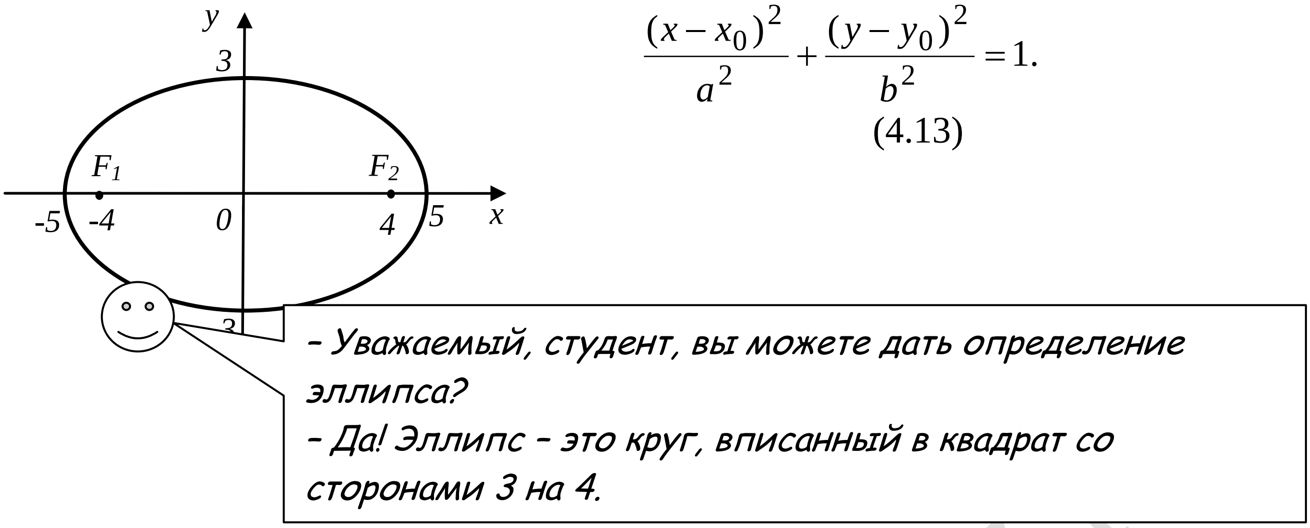


Рис. 4.7

<u>*Пример 4.4.*</u> Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Построить эллипс.

<u>*Решение*</u>. В соответствии с данным уравнением $a^2=25$, $b^2=9$, следовательно, $a=5$, $b=3$.

Отсюда $c^2=a^2-b^2=25-16=9$, $c=4$, $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

Эллипс изображен на рис. 4.7.

3. *Гипербола*

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (**фокусов**) той же плоскости есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Модуль разности расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов обычно обозначают через $2a$, а расстояние между фокусами – через $2c$. По определению $2a<2c$, то есть $a<c$.

Если выбрать систему координат так, что фокусы $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ лежат на оси Ox, а начало координат совпадает с серединой отрезка F_1F_2 (рис. 4.8), то из равенства $|MF_1-MF_2|=2a$, где $M(x;y)$ – произвольная точка гиперболы, можно вывести **каноническое уравнение гиперболы**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,} \quad (b^2=c^2-a^2). \qquad (4.14)$$

Основными элементами гиперболы являются:

- центр симметрии $O(0;0)$ – **центр** гиперболы;
- оси симметрии Ox и Oy;

- $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ – фокусы;
- точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ – **вершины** гиперболы;
- отрезок $A_1A_2 = 2a$ – **действительная** ось гиперболы;
- отрезок $B_1B_2 = 2b$ – **мнимая ось** гиперболы;
- a и b – **действительная** и **мнимая полуоси** гиперболы соответственно;
- прямоугольник, образованный прямыми $x = a$; $x = -a$; $y = b$; $y = -b$ – **основной прямоугольник** гиперболы;
- две прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ – **асимптоты** гиперболы.

Замечание. При удалении от начала координат гипербола сколь угодно близко подходит к своим асимптотам, не пересекая их. Построение гиперболы удобно начинать с построения основного прямоугольника и его диагоналей, которые являются асимптотами гиперболы.

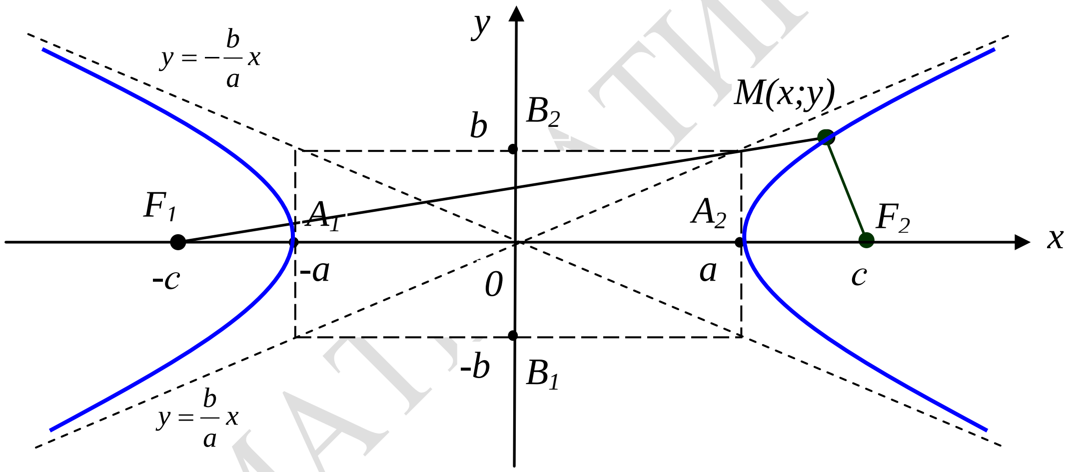


Рис. 4.8

Число $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом гиперболы** и характеризует ее форму. Если $a = b$, то гиперболу называют **равносторонней**.

Если центр гиперболы находиться в точке $C(x_0; y_0)$, а оси параллельны осям координат, то уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (a > b). \tag{4.15}$$

<u>*Пример 4.5*</u>. Определить вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $9x^2 - 4y^2 = 36$. Построить гиперболу.

<u>*Решение.*</u> Преобразуем уравнение к каноническому виду:

$9x^2 - 4y^2 = 36,$ разделим обе части уравнения на 36. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$ Тогда $a^2 = 4, \quad b^2 = 9,$ следовательно, $a = 2, \quad b = 3.$

Вершины гиперболы $A_1(-2;\,0), A_2(2;\,0).$

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13, \quad c = \sqrt{13},$

$F_1\left(-\sqrt{13};\,0\right), \quad F_2\left(\sqrt{13};\,0\right)$ – фокусы.

Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$ Асимптоты гиперболы $y = \pm\frac{3}{2}x$ (рис. 4.9).

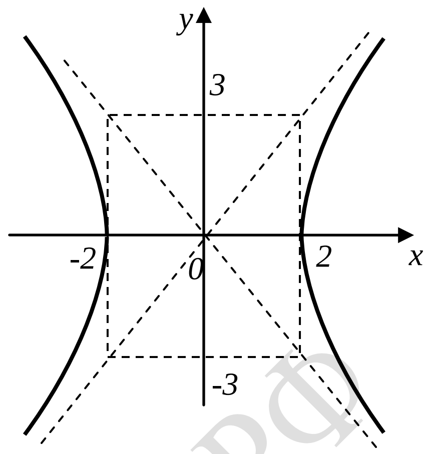


Рис. 4.9

4. *Парабола*

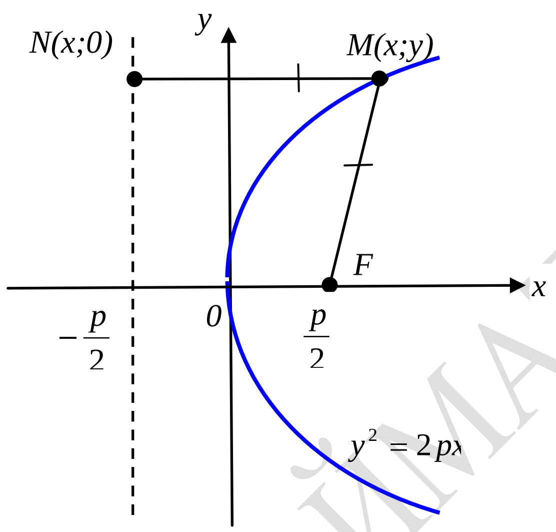


Рис. 4.10

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (**фокуса**) и данной прямой (**директрисы**), расположенных в той же плоскости (рис. 4.10). Расстояние от фокуса до директрисы обозначают p и называют **параметром** параболы. Если выбрать систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокус, перпендикулярно директрисе по направлению от директрисы к фокусу и начало координат посредине между фокусом и директрисой, то уравнение директрисы будет $x = -\frac{p}{2}$, а фокус $F\left(\frac{p}{2};0\right).$

Тогда из равенства $|MF| = |MN|,$ где $M(x;y)$ – произвольная точка параболы, можно вывести **каноническое уравнение параболы**

$$\boxed{y^2 = 2px.} \tag{4.16}$$

Основными элементами параболы являются:

- ось Ox – **ось симметрии** параболы;
- точка $O(0;\,0)$– **вершина** параболы;

- прямая $x = -\frac{p}{2}$ – **директриса** параболы;
- точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – **фокус** параболы.

Возможны другие расположения параболы на плоскости (рис. 4.11), которые задаются уравнениями:

а) $y^2 = -2px$; б) $x^2 = 2py$; в) $x^2 = -2py$.

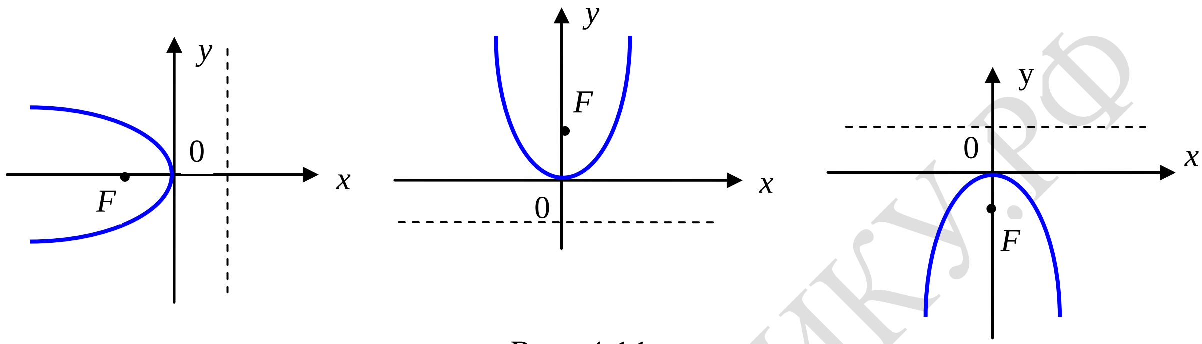


Рис. 4.11

Если вершина параболы лежит в точке $C(x_0;y_0)$, то канонические уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} &(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0); \qquad (x-x_0)^2 = 2p(y-y_0), \\ &(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0); \qquad (x-x_0)^2 = 2p(y-y_0). \end{aligned} \tag{4.17}$$

<u>*Пример 4.6.*</u> Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(2;8)$ и симметрична относительно оси Oy. Написать ее уравнение.

<u>*Решение*</u>. Так как парабола симметрична относительно оси Oy и имеет вершину в начале координат, то ее уравнение $x^2 = 2py$. Точка $A(2;8)$ лежит на параболе, подставим ее координаты в уравнение параболы: $2^2 = 2p \cdot 8$. Отсюда $p = \frac{1}{4}$. Тогда уравнение гиперболы $x^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} y$ или $x^2 = \frac{1}{2} y$.

5. *Преобразование уравнений второго порядка к каноническому виду*

Общее уравнение второй степени имеет вид:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где A, B, C, D, E, F – действительные числа, причем A, B, C одновременно в нуль не обращаются.

В зависимости от соотношения значений коэффициентов уравнения оно может описывать ту или иную кривую второго порядка. Для выяснения, какую именно, уравнения преобразуют к каноническому виду.

Пример 4.7. Даны уравнения

а) $x^2+y^2-8x+2y-8=0$; б) $4x^2+y^2+6y-7=0$; в) $y^2-2x+4y+2=0$.

Выяснить, какие кривые второго порядка они описывают.

Решение.

а) $x^2+y^2-8x+2y-8=0$; выделяя полные квадраты, получим

$(x^2-8x)+(y^2+2y)-8=0 \Rightarrow (x^2-8x+16)+(y^2+2y+1)-16-1-8=0 \Rightarrow$

$(x-4)^2+(y+1)^2=25.$ Это уравнение окружности с центром $C(4;-1)$ и радиусом $R=5$.

б) $4x^2+y^2+6y-7=0$; выделяя полные квадраты, получим

$4x^2+(y^2+6y)-7=0 \Rightarrow 4x^2+(y^2+6y+9)-9-7=0 \Rightarrow 4x^2+(y+3)^2=16 \Rightarrow$

$\frac{x^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{16}=1.$ Это уравнение эллипса с центром симметрии в точке $C(0;-3)$, причем фокусы лежат на оси Oy.

в) $y^2-2x+4y+2=0$, выделяя полные квадраты, получим

$(y^2+4y)-2x+2=0 \Rightarrow (y^2+4y+4)-4-2x+2=0 \Rightarrow (y+2)^2+2x+2=0 \Rightarrow$

$(y+2)^2=2(x+1)$. Это уравнение параболы с вершиной в точке $C(-1;-2)$, ось симметрии – ось Ox.

Лекция 4.3. Прямая и плоскость в пространстве

П л а н

1. *Плоскость.*
2. *Прямая линия в пространстве.*

1. *Плоскость*

Точка является основной элементарной единицей на прямой, прямая – на плоскости, а плоскость – трехмерном пространстве.

Плоскость и ее различные уравнения

Теорема 4.1. Всякая плоскость в пространстве определяется уравнением

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0} \qquad (4.18)$$

и обратно, всякое линейное уравнение определяет плоскость в пространстве. Уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ – **общее уравнение плоскости.**

Частные случаи общего уравнения плоскости

Значения коэффициентов	Уравнение плоскости	Расположение плоскости в пространстве
$D=0$	$Ax+By+Cz=0$	проходит через начало координат
$A=0$	$By+Cz+D=0$	$\parallel Ox$ $(\perp yOz)$
$B=0$	$Ax+Cz+D=0$	$\parallel Oy$ $(\perp xOz)$
$C=0$	$Ax+By+D=0$	$\parallel Oz$ $(\perp xOy)$
$A=D=0$	$By+Cz=0$	проходит через Ox
$B=D=0$	$Ax+Cz=0$	проходит через Oy
$C=D=0$	$Ax+By=0$	проходит через Oz
$A=B=0$	$Cz+D=0$	$\parallel xOy$ $(\perp Oz)$
$A=C=0$	$By+D=0$	$\parallel xOz$ $(\perp Oy)$
$B=C=0$	$Ax+D=0$	$\parallel yOz$ $(\perp Ox)$
$A=B=D=0$	$Cz=0$	плоскость xOy
$A=C=D=0$	$By=0$	плоскость xOz
$B=C=D=0$	$Ax=0$	плоскость yOz

Плоскость в пространстве может быть задана:

1) как плоскость, проходящая через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой. **Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки**:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.} \tag{4.19}$$

2) как плоскость, отсекающая на осях Ox, Oy, Oz соответственно отрезки a, b, c. **Уравнение плоскости в отрезках**:

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.} \tag{4.20}$$

Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Если заданы две плоскости P_1 и P_2 уравнениями вида $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то **угол** φ **между плоскостями** есть угол между нормальными векторами $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$ и $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \text{ или } \boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2} + C_1^{\,2}}\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}}.} \quad (4.21)$$

Если $P_1 \perp P_2$, то $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$, и **условие перпендикулярности двух плоскостей:**

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.} \quad (4.22)$$

Если плоскость $P_1 \parallel P_2$, то $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$, и **условие параллельности двух плоскостей:**

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.} \quad (4.23)$$

2. Прямая линия в пространстве

Прямая и ее различные уравнения

Прямая в пространстве может быть задана:

1) как линия пересечения двух плоскостей, то есть системой уравнений:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + Cz_2 + D_2 = 0. \end{cases}} \quad (4.24)$$

2) двумя своими точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, тогда **прямая, проходящая, через две точки уравнениями** задается уравнение:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.} \quad (4.25)$$

3) точкой $M_1(x_1;y_1;z_1)$, ей принадлежащей, и направляющим вектором $\vec{s} = \{m;n;p\}$, ей коллинеарным. Тогда **каноническое уравнение прямой**:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.} \quad (4.26)$$

4) $\begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt \\ z = z_1 + pt \end{cases}$ – **параметрическое уравнение прямой**, где t – параметр, $t \in R.$

Угол между двумя прямыми. Условие параллельности *и перпендикулярности двух прямых*

Если заданы две прямые l_1 и l_2 уравнениями $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ и $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_{21}}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, то **угол** φ **между прямыми** есть угол между направляющими векторами этих прямых $\vec{S}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$ и $\vec{S}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{S_2}\right|} \text{ или } \boxed{\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.} \quad 4.27)$$

Если прямая $l_1\perp l_2$, то $\overrightarrow{S_1}\perp\overrightarrow{S_2}$. Тогда **условие перпендикулярности двух прямых:**

$$\boxed{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.} \qquad (4.28)$$

Если прямая $l_1 // l_2$, то $\overrightarrow{S_1} // \overrightarrow{S_2}$. Тогда **условие параллельности двух прямых**:

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.} \qquad (4.29)$$