Тема 5

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Лекция 5.1. Функция и ее свойства

План

1. *Множества и операции над ними. Числовые множества.*
2. *Понятие функции, ее свойства.*
3. *Понятие числовой последовательности.*

1. Множества и операции над ними. Числовые множества

Математики утверждают, что теория множеств появилась на свет более 100 лет назад благодаря Кантору[1].

Обычно говорят о **множестве** как о совокупности объектов, называемых **элементами множества**, наделенных определенными общими свойствами.

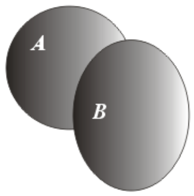
Для обозначения факта, что объект a принадлежит множеству A, пишут $a \in A$ и говорят «a принадлежит A». Множество называется **пустым** Ǿ, если оно не содержит ни одного элемента.

Выделяют следующие способы задания множеств: **перечислением** всех элементов множества: $A = \{1, 2, 3\}$ и заданием **общей характеристики** (общих свойств) элементов множества: $A = \{x \in R / x^2 - 4 = 0\}$.

Над множествами можно проводить следующие операции: пересечение, объединение и разность.

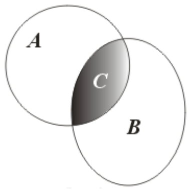
---

[1] Георг Кантор (1845–1918) – немецкий математик и философ, основоположник теории множеств.



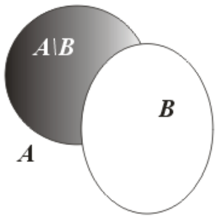
Объединение множеств A и B (пишется $A \cup B$) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит либо A, либо B (рис. 5.1).

Рис. 5.1



Пересечение множеств A и B (пишется $A \cap B$) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит и A, и B (рис. 5.2).

Рис. 5.2



Разность множеств A и B (пишется $A \setminus B$) есть множество элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B (рис. 5.3).

Рис. 5.3

Пример 5.1. Пусть даны два множества $A = \{2, 4, 6, 8\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$. Найти $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

Решение.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$; $A \cap B = \{2, 4\}$; $A \setminus B = \{6, 8\}$; $B \setminus A = \{1, 3, 7\}$.

Числовые множества это множества, состоящие из чисел: натуральные числа $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$; целые числа $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\}$; рациональные $Q = \left\{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\right\}$; иррациональные числа I={бесконечная непериодическая дробь}; действительные числа $R = Q \cup I$.

Распространенным типом числовых множеств является числовой промежуток, который бывает следующих видов:

– отрезок $[a; b] = \{x / \; a \le x \le b\}$;

– интервал $(a; b) = \{x / \; a < x < b\}$;

– полуоткрытый интервал $[a; b) = \{x / \; a \le x < b\}$;
$(a; b] = \{x / \; a < x \le b\}$;

– бесконечный интервал $(-\infty; b] = \{x / \; x \le b\}$; $(-\infty; b) = \{x / \; x < b\}$;
$[a; +\infty) = \{x / \; x \ge a\}$; $(a; +\infty) = \{x / \; x > a\}$;
$(-\infty; +\infty) = \{x / -\infty < x < +\infty\} = R.$

2. Понятие функции, ее свойства

Функция $y = f(x)$ – это зависимость f, при которой каждому числу x из множества D ставится в соответствие единственное значение y из множества E. Здесь x – аргумент или независимая переменная; y – функция или зависимая переменная.

Например, функция $y = x^3$ отображает множество чисел $\{\ldots,0, 1, 2, 3,\ldots\}$ на множество чисел $\{\ldots,0, 1, 8, 27,\ldots\}$.

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество допустимых значений аргумента x. Обозначается: $D(y)$.

Областью значения функции $y = f(x)$ называется множество всех y, которые может принимать функция. Обозначается: $E(y)$.

Наглядное представление о числовой функции дает ее график.

Графиком функции $y = f(x)$ с областью определения D называется множество точек плоскости: $\Gamma = \{(x, f(x)) / x \in D\}$.

Функция может быть задана различными способами, наиболее часто применяются следующие четыре (табл. 5.1)

Таблица 5.1

Способ	Описание	Пример
Аналитический	С помощью формулы, указывающей, какие действия нужно произвести над x, чтобы получить y	Функции могут быть заданы: - **явно** $y = f(x)$, например, $y = x^2 + 4$ или с помощью нескольких формул: $y = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ x^2, & 1 \le x < 4; \\ 4x, & x \ge 4 \end{cases}$ - **неявно** $F(x; y) = 0$, например, $x^2 + xy + y^2 = 0$
Графический	С помощью графика	ЭКГ у пациента, показания осциллографа
Табличный	В виде таблицы, содержащей значения аргумента x и соответствующие значения функции $f(x)$	Таблица выигрышей в лотерею, таблица значений функции Пуассона и т.д.
Словесный	С помощью естественного языка	Игрек равно целая часть от икс

Основные свойства и виды функций

1. *Четность, нечетность*. Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для любых значений x из области определения X значение $(-x)$ также принадлежит X и выполнено условие $f(-x) = f(x)$ и **нечетной**, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция называется **функцией общего вида**.

Например, $y = x^2 -$ четная функция, $y = x^3 -$ нечетная функция.

2. *Монотонность.* Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, верно неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, верно неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

3. *Ограниченность.* Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на промежутке X, если существует число $M > 0,$ такое что $\left|f(x)\right| < M$ для любых $x \in X$.

Функция **ограничена сверху**, когда при тех же условиях выполнено $f(x) \le M$, **ограничена снизу**, если выполнено $f(x) \ge M$.

Например, функция $y = \cos x$ является ограниченной, так как $\left|\cos x\right| \le 1$.

4. *Периодичность.* Функция $y = f(x)$ называется **периодической** с периодом $T \ne 0$, если для любых значений x из области $X,$ значение $(x+T)$ так же принадлежит X и выполнено $f(x+T) = f(x)$. Например, функция $y = tgx$ является периодической с наименьшим периодом $T = \pi$.

5. *Обратная функция.* Пусть $y = f(x) -$ функция, с областью определения X и областью значений Y. Функцию $x = \varphi(y)$, определенную на множестве Y с областью значений X, называют **обратной** к функции $y = f(x)$ и обозначают $x = f^{-1}(y)$. На практике аргумент в обратной функции обозначается через x, а значение функции через y. Тогда обратная функция запишется $y = f^{-1}(x)$.

Например, для функции $y = e^x$ обратной будет $x = \ln y$ или в принятых обозначениях $y = \ln x$; для функции $y = ax + b,\ a \ne 0$ обратной будет функция $y = \dfrac{x-b}{a}$. Графики взаимно-обратных функций симметричны относительно графика функции $y = x -$ биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Теорема 5.1. Для любой строго монотонной функции существует обратная функция.

6. *Сложная функция.* Если y является функцией от $u,$ то есть $y = f(u)$, а u, в свою очередь, функцией от x, то есть $u = u(x)$, то $y = f(u(x))$ является **сложной функцией** от x («композиция функций», «функция от функции»). Например, две функции $y = \sqrt[3]{u}$ и $u = x - 10$ определяют сложную функцию вида $y = \sqrt[3]{x-10}$.

7. *Основные элементарные функции*:

1) степенная функция $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in R$;

2) показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \ne 1$;

3) логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \ne 1$;

4) тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$;

5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

3. Понятие числовой последовательности

Рассмотрим особый вид функции – числовую последовательность.

Числовой последовательностью называют функцию $y = f(n)$ натурального аргумента *n*. Для всякого $n \in N$ значения $f(n)$ традиционно обозначают x_n и называют **общим членом** последовательности. Для наглядности выписывают несколько членов последовательности, начиная с первого $x_1; x_2; ...; x_n ...$. Многоточие в конце символизирует то, что последовательность содержит бесконечное количество элементов. Последовательность, как правило, задается формулой общего члена.

Пример 5.2. Представить в развернутой форме последовательности, заданные формулами: 1) $x_n = \frac{2}{n^3}$; 2) $y_n = 3n + 2$.

Решение. 1) $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{4}$; $x_3 = \frac{2}{27}$;…; 2) $y_1 = 5$; $y_2 = 8$; $y_3 = 11$;…

Так как последовательность – это частный вид функции, то, как и функции, последовательности могут быть ограниченными и неограниченными, возрастающими и убывающими. Например,

1) $x_n = 4 - \frac{1}{n}$, $n \in N -$ ограниченная, убывающая;

2) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in N -$ ограниченная, немонотонная;

3) $x_n = n \cdot \sin\frac{\pi n}{2}$, $n \in N -$ неограниченная, немонотонная.

Лекция 5.2. Предел функции, основные теоремы о пределах

П л а н

1. Предел числовой последовательности.
2. Теоремы о пределах последовательностей.
3. Понятие предела функции.
4. Теоремы о пределах функций.

В математическом анализе широко используются кванторы – представление словесных выражений в виде символов:

$\Rightarrow$ – знак логического следования (одно следует из другого);

$\Leftrightarrow$ – знак равносильности;

$\exists$ – квантор существования (соответствует словам «имеется», «найдется»);
$\forall$ – квантор общности (соответствует словам «для любого», «для всех»).

1. Предел числовой последовательности

<u>*Пример 5.3*</u>. Пусть в тире тренировались два стрелка: «Снайпер» и «Мазила».

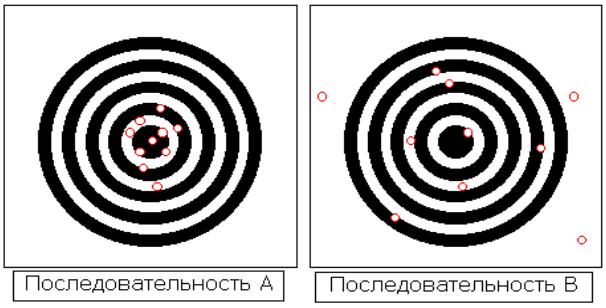


Рис. 5.4

Если посмотреть на результаты этой тренировки (рис. 5.4), то нетрудно заметить, что последовательность выстрелов «Снайпера» (*A*) вся находится не только внутри мишени, но и как бы «стремится» к центру мишени. А вот у «Мазилы» дела плохи (последовательность *B*) – выстрелы разбросаны беспорядочно по всей мишени и в «молоке».

Математики в этом случае говорят, что последовательность *A* сходится (к «10»), а последовательность *B* – расходится. Число, к которому сходится последовательность *A* (число 10) называют **точкой сгущения**. Существуют последовательности, которые имеют единственную точку сгущения, которую математики называют пределом числовой последовательности.

Число a называется **пределом числовой последовательности** x_n, если для любого сколь угодно малого, наперед задуманного, положительного числа ε найдется такой номер N, начиная с которого для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и говорят «последовательность x_n стремится к a при n стремящемся к бесконечности».

На языке кванторов определение предела имеет вид:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл понятия предела последовательности

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что все члены последовательности x_n с номерами $n > N$ расположены между числами $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$. То есть в интервале $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ находится бесконечное число, а вне интервала – конечное число элементов последовательности.

Образно выражаясь, $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ – это «ловушка» для последовательности: начиная с некоторого номера n эта ловушка «заглатывает» и все последующие члены последовательности.

Дадим простую, но нестрогую трактовку определения предела. Число a является пределом числовой последовательности x_n, если при возрастании номера n элементы x_n сколь угодно мало отличаются от числа a. В качестве примера рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{1}{n}$, которая с ростом n неограниченно приближается к нулю (как бы «слипается» с нулем) и можно записать: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ (рис. 5.5).

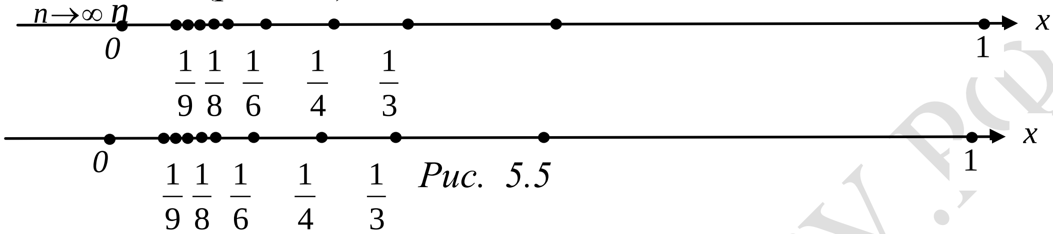


Рис. 5.5

Последовательность, имеющую предел a, называют **сходящейся** к a или просто сходящейся, а последовательность, не имеющую предела, – **расходящейся.**

2. Теоремы о пределах последовательностей

Теорема 5.1. Сходящаяся последовательность имеет только единственный предел.

Теорема 5.3. Сходящаяся последовательность всегда ограничена.

Теорема 5.4. Если последовательности x_n и y_n сходятся, то:

1) предел постоянной последовательности равен значению членов этой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} C = C \ (C - \text{константа});$$

2) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

3) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n;$$

4) постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} (Cx_n) = C \cdot \lim_{n\to\infty} x_n;$$

5) предел частного равен частному пределов, при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}\qquad\left(\lim_{n\to\infty}y_n\neq 0\right).$$

Теорема 5.5 (*о предельном переходе в неравенстве*). Если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ и, начиная с некоторого номера, выполняется $x_n\le y_n$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\le\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, или, иначе, $a\le b$.

Теорема 5.6 (*о сжатой переменной*). Если члены трех последовательностей связаны неравенствами $x_n\le y_n\le z_n$ и при этом $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$, то и последовательность y_n имеет предел *a*, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

Теорема 5.7 (*теорема Вейерштрасса*[2] *о существовании предела монотонной последовательности*). Любая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

Обобщим понятие предела функции натурального аргумента для произвольной функции.

3. Понятие предела функции

Понятие окрестности точки

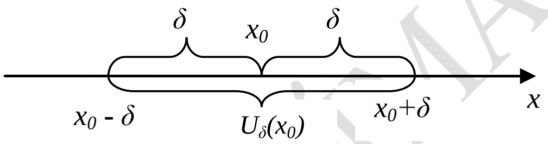


Рис. 5.6

Отметим на оси *Ox* точку x_0, а затем вправо и влево от нее отложим отрезки длиной δ $(\delta>0)$. Концы интервала будут иметь значения $x_0-\delta$ и $x_0+\delta$. Получим промежуток с центром в точке x_0 и длиной 2δ (рис. 5.6).

δ**-окрестностью** точки x_0 называют открытый промежуток $U_\delta(x_0)=(x_0-\delta;x_0+\delta)$ с центром в точке x_0.

Если $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$, то $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, или $-\delta<x-x_0<\delta$, или $|x-x_0|<\delta$.

ε**-окрестностью** точки A называют открытый промежуток $U_\varepsilon(A)=(A-\varepsilon;A+\varepsilon)$ с центром в точке A.

Определение предела функции в точке

[2] Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897) – великий немецкий математик. «Отец» современного математического анализа.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0.

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x из δ-окрестности точки x_0 $(x \neq x_0)$ соответствующие значения функции $f(x)$ содержатся в ε-окрестности точки A.

Предел функции обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

На языке $\varepsilon - \delta$ определение предела функции может быть записано следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0), x \neq x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

или

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Дадим простую, но нестрогую трактовку определения предела функции.

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ **при** $x \to x_0$, если приближение переменной x к точке x_0 сопровождается приближением функции $f(x)$ к A.

Замечание 1. В определении предела функции не требуется существование функции в самой точке x_0. Значит, функция может быть не определена в точке x_0, но иметь предел в этой точке.

Замечание 2. В случае когда $x_0 = \infty$, говорят о пределе функции в бесконечно удаленной точке.

Замечание 3. Определении предела функции остается в силе и при $A = \infty$.

Замечание 4. Не для всякой функции $y = f(x)$ существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Например, функция $y = \cos x$ не имеет предела при $x \to \infty$, так как ее значения при $x \to \infty$ колеблются между числами ± 1, не накапливаясь около какого-либо одного значения.

Замечание 5. Если при $x \to x_0$ переменная x принимает лишь значения, меньшие x_0, или, наоборот, лишь большие x_0, и при этом функция $y = f(x)$ стремится к числу A, то говорят об **односторонних пределах** функции соответственно слева $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и справа $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. «Добавка» -0 символизирует бесконечно малое отрицательное число, а «добавка» $+0$ – бесконечно малое положительное число. Запись $x \to x_0 - 0$ (читается «икс стремится к икс нулевому слева») обозначает, что мы подходим к числу x_0 с левой стороны. Запись $x \to x_0 + 0$ обозначает, что мы подходим к числу x_0 справа.

1. *Теоремы о пределах функций*

Теорема 5.8. Если $f(x)$ и $g(x)$– функции, для которых существуют конечные пределы при $x \to x_0$ и C – константа, то:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \quad \left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0 \right)$.

Теорема 5.9 (*о предельном переходе в неравенстве*). Если существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ и $f(x) \le g(x)$ для всех x из окрестности точки x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Теорема 5.10 (*о сжатой функции*). Если три функции связаны неравенствами $f(x) \le z(x) \le g(x)$и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$, то функция $z(x)$ имеет предел a, при $x \to x_0$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} z(x) = a$.

Теорема 5.11 (*теорема о пределе монотонной ограниченной функции*). Если монотонная функция ограниченна, то она имеет конечный предел.

Воспользуемся этими свойствами для вычисления пределов.

Пример 5.4. Найти $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 8}$;

Решение.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 8} = \frac{\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + x + 2)}{\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + 2x + 8)} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} x^2 + \lim\limits_{x \to 3} x + \lim\limits_{x \to 3} 2}{\lim\limits_{x \to 3} x^2 + \lim\limits_{x \to 3} 2x + \lim\limits_{x \to 3} 8} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} x^2 + \lim\limits_{x \to 3} x + 2}{\lim\limits_{x \to 3} x^2 + 2 \lim\limits_{x \to 3} x + 8} =$$

$$= \frac{3^2 + 3 + 2}{3^2 + 2 \cdot 3 + 8} = \frac{14}{23}.$$

Итак, решение предела свелось к обычной подстановке предельного значения аргумента в функцию, стоящую под знаком предела, то есть вместо

x подставили число 3. Такой способ вычисления предела функции применим, если точка x_0 входит в область определения функции.

Теорема 5.12. Если точка x_0 принадлежит области определения функции $f(x)$, то предел этой функции при $x \to x_0$ равен значению функции $y = f(x)$ в точке x_0, то есть $x_0 \in D(y) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Не всякий предел можно найти так просто. Иногда при вычислении пределов результат формальной подстановки в функцию предельного значения аргумента приводит к выражениям вида $\left[\frac{0}{0}\right]; \left[\frac{\infty}{\infty}\right]; [\infty - \infty]; [0 \cdot \infty]$, а в теоремах о пределах функций эти ситуации не рассматриваются. В этих случаях говорят, что имеет место **неопределенность**, а найти предел означает раскрыть эту неопределенность. Существует ряд методов для раскрытия неопределенностей, при этом важную роль играют функции, пределы которых равны либо нулю, либо бесконечности.

Лекция 5.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства

План

1. Понятие бесконечно малых и бесконечно больших функций, их свойства.
2. Эквивалентные бесконечно малые функции.
3. Раскрытие неопределенностей.

В теории пределов особое место занимают функции, пределы которых при определенных значениях *x* равны нулю или бесконечности.

1. Понятие бесконечно малых и бесконечно больших функций, их свойства

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой при** $x \to x_0$, если ее предел равен нулю $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Данное определение может быть записано следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad \forall x : |x - x_0| < \delta,\, x \ne x_0 \quad \Rightarrow \quad |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой при** $x \to x_0$, если ее предел равен бесконечности $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Данное определение может быть записано следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x)| > M.$$

Выражение $x \to x_0$ в данных определениях играет важную роль, так как одна и та же функция, но при разных значениях x_0 может быть бесконечно большой, бесконечно малой или ни той, ни другой. Например, функция $f(x) = x - 2$ является бесконечно малой при $x \to 2$, бесконечно большой при $x \to \pm\infty$ и ни той, ни другой при $x \to 5$.

Бесконечно малая функция тесно связана с условием существования предела функции, что отражено в следующей теореме.

Теорема 5.13. Для того чтобы функция $f(x)$ имела при $x \to x_0$ предел A, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде суммы

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)-$ бесконечно малая при $x \to x_0$.

Свойства бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)-$ бесконечно малые функции при $x \to x_0$, $\varphi(x)-$ ограниченная функция и $C-$ константа, тогда:

1) $\alpha(x) \pm \beta(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$;
2) $\alpha(x)\beta(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$;
3) $C\beta(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$;
4) $\varphi(x)\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Свойства бесконечно больших функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x \to x_0$, $\varphi(x)-$ ограниченная и не равная нулю в окрестности точки x_0, тогда:

1) если $f(x) \to +\infty$ и $g(x) \to +\infty$, то $f(x) + g(x) \to +\infty$, при $x \to x_0$;
2) если $f(x) \to -\infty$ и $g(x) \to -\infty$, то $f(x) + g(x) \to -\infty$, при $x \to x_0$;
3) если $f(x) \to +\infty$ и $g(x) \to -\infty$, то $f(x) - g(x) \to +\infty$, при $x \to x_0$;
4) если $f(x) \to -\infty$ и $g(x) \to +\infty$, то $f(x) - g(x) \to -\infty$, при $x \to x_0$;
5) $f(x) \cdot g(x) \to \infty$, при $x \to x_0$;
6) $f(x) \cdot \varphi(x) \to \infty$, при $x \to x_0$.

Связь бесконечно малых и бесконечно больших функций

Теорема 5.14. а) если функция $f(x)$ – бесконечно большая при $x \to x_0$, то функция, обратная ей, $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая при $x \to x_0$; б) если функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ и $\alpha(x) \neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая при $x \to x_0$.

□ а) Так как $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то найдется $\delta > 0$ такое, что как только $|x - x_0| < \delta$, так $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Но тогда для тех же x: $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$. А это и означает, что $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$. ■

<u>*Пример 5.5.*</u> Ясно, что при $x \to +\infty$ функция $y = x^2 + 1$ является бесконечно большой. Но тогда по теореме 5.14 функция $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ – бесконечно малая при $x \to +\infty$, то есть $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$.

На символах свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций можно записать: $[0 \pm 0] = 0$; $[0 \cdot 0] = 0$; $[\infty + \infty] = \infty$; $[-\infty - \infty] = -\infty$; $[\infty \cdot \infty] = \infty$; $\left[\dfrac{1}{0}\right] = \infty$; $\left[\dfrac{1}{\infty}\right] = 0$.

2. Эквивалентные бесконечно малые функции

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to x_0$.

1. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка малости** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$.

2. Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка малости** чем $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ (говорят, что $\alpha(x)$ стремится к нулю с большей скоростью, чем $\beta(x)$).

3. Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более низкого порядка малости,** чем $\beta(x)$, при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ (говорят, что $\beta(x)$ стремится к нулю с большей скоростью, чем $\alpha(x)$).

4. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **несравнимыми бесконечно малыми** при $x \to x_0$, если предел их отношения не существует.

5. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными бесконечно малыми (асимптотически равными)** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ (говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ стремятся к нулю с одинаковой скоростью). Пишут $\alpha(x) \approx \beta(x)$, при $x \to x_0$.

Пример 5.6.

1) $\alpha(x) = 5x^4$ и $\beta(x) = x^4$ – бесконечно малые одного порядка малости при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^4}{x^4} = 5$.

2) $\alpha(x) = 3x^4$ есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\beta(x) = x$ при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^4}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 3x^3 = 0$.

3) $\alpha(x) = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ и $\beta(x) = x$ есть несравнимые бесконечно малые при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ – не существует.

Одинаковая скорость стремления к нулю эквивалентных бесконечно малых позволяет сформулировать теорему, существенно упрощающую вычисление многих пределов.

Теорема 5.15. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если обе или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Пример на применение данной теоремы рассмотрен в лекции 5.4 п. 1.

3. Раскрытие неопределенностей

Как уже отмечалось, далеко не все пределы можно вычислить простой подстановкой в функцию, стоящую под знаком предела, значения, к которому стремиться аргумент. Достаточно часто сталкиваются с некоторыми неопределенностями, когда невозможно сразу найти значение предела. В таких случаях применяют методы, позволяющие удалить возникшую неопределенность, или **раскрыть неопределенность**. Основными неопределенностями являются неопределенности, связанные с отношением двух бесконечно малых и двух бесконечно больших величин, обозначаемых $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ и $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ соответственно. Кроме этого, встречаются неопределенности $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$, $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$, $\left[0^{0}\right]$.

Рассмотрим стандартные методы раскрытия неопределенности.

1. Пусть рассматривается предел отношения многочленов $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)-$ бесконечно большие функции при $x\to x_0,\ (x\to\infty)$. Очевидно, что в этом случае имеет место неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия предлагается *числитель и знаменатель разделить на* x *в наивысшей степени и применить свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.*

Пример 5.7. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-3x}{x^3-4x+10}$.

Решение: Очевидно, что имеет место неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Наивысшая степень x равна трем. Разделим числитель и знаменатель на x^3 и после сокращения применим свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-3x}{x^3-4x+10}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{10}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}+\frac{10}{x^3}}=\left[\frac{2+0-0}{1-0+0}\right]=\frac{2}{1}=2.$$

Пример 5.8. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-1}{2x^3-3}$.

Решение: Очевидно, что имеет место неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Наивысшая степень x равна четырем. Разделим числитель и знаменатель на x^4 и после сокращения применим свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^2-1}{2x^3-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}-\frac{1}{x^4}}{\frac{2x^3}{x^4}-\frac{3}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^4}}=\left[\frac{3+0-0}{0-0}\right]=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty.$$

Пример 5.9. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x^2-2}{x^5+1}$.

Решение: Очевидно, что имеет место неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Наивысшая степень x равна пяти. Разделим числитель и знаменатель на x^5 и после сокращения применим свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+5x^2-2}{x^5+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^4}{x^5}+\dfrac{5x^2}{x^5}-\dfrac{2}{x^5}}{\dfrac{x^5}{x^5}+\dfrac{1}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{2}{x^5}}{1+\dfrac{1}{x^5}}=\left[\frac{0+0-0}{1+0}\right]=\frac{0}{1}=0.$$

Сравнивая результаты трех примеров, нетрудно понять, что значение предела зависит от степени многочленов, стоящих в числителе и знаменателе. В общем виде правило можно записать следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x^1+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & \textit{если} \quad n=m;\\ 0, & \textit{если} \quad n<m;\\ \infty, & \textit{если} \quad n>m.\end{cases}$$

2. Пусть рассматривается предел отношения многочленов $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to x_0$. Очевидно, что в этом случае имеет место неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия предлагается *разложить на множители числитель и знаменатель и произвести сокращение на* $(x-x_0)$.

Пример 5.10. Найти предел $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$.

Решение. Очевидно, что имеет место неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Раскроем ее, используя тождественные преобразования:

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-4x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+1)}=\lim_{x\to5}\frac{x+5}{x+1}=\frac{5+5}{5+1}=\frac{10}{6}=1\frac{2}{3}.$$

3. Пусть под знаком предела имеется функция или функции, стоящие под знаком корня. В этом случае могут появиться неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty-\infty]$. Для их раскрытия предлагается *домножить числитель и знаменатель на выражение, дополняющее одну из формул до формулы сокращенного умножения (разность квадратов, сумма и разность кубов). Затем провести алгебраические преобразования и сокращение на* $(x-x_0)$.

<u>Пример 5.11</u>. Найти предел $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$.

<u>Решение</u>. Очевидно, что имеет место неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Домножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{x+6}+3$ и выражение в знаменателе запишем как разность квадратов. Получим

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(\sqrt{x+6}\right)^2 - 3^2} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{x+6-9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \left(\sqrt{x+6}+3\right) = \sqrt{3+6}+3 = 6.$$

Для нахождения пределов тригонометрических, показательных и логарифмических функций часто используют так называемые замечательные пределы.

Лекция 5.4. Замечательные пределы. Непрерывность функций

План

1. *Первый замечательный предел.*
2. *Второй замечательный предел.*
3. *Непрерывность функций и точки разрыва.*

В математике существуют пределы, которые имеют большое прикладное и теоретическое значение. Их называют замечательными пределами. Первый из них связан с тригонометрическими, а второй с показательными и логарифмическими функциями.

1. Первый замечательный предел

Первым замечательным пределом называется предел следующего вида:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \qquad (5.1)$$

предел отношения синуса к его аргументу равен единице при стремлении аргумента к 0. Предел в формуле (5.1) имеет неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

<u>Пример 5.12.</u> Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$.

<u>Решение</u>. 1-й способ (используя первый замечательный предел). Будем сводить данный предел к первому замечательному, поэтому проведем

преобразования – домножим числитель и знаменатель на 5: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$

2-й способ (замена эквивалентных бесконечно малых). Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$ то функция $\sin x$ и x – эквивалентные бесконечно малые при $x\to 0$. Значит, функция $\sin 5x$ эквивалентна $5x$ при $x\to 0$. Заменим функцию синуса на ее аргумент, получим: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}5=5.$

Рекомендуется запомнить **формулы важнейших эквивалентностей** при $x\to 0$:

1) $\sin x\approx x,$ 2) $tgx\approx x,$ 3) $\arcsin x\approx x,$ 4) $arctgx\approx x,$

5) $1-\cos x\approx\frac{x^2}{2},$ 6) $e^x-1\approx x,$ 7) $\sqrt{1+x}-1\approx\frac{x}{2}.$

<u>*Пример 5.13.*</u> Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.$

<u>*Решение*</u>. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}=\frac{0}{2}=0.$

2. *Второй замечательный предел*

Рассмотрим числовую последовательность вида

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad n=1,\,2,\ldots$$

Члены этой последовательности представлены в таблице 5.2.

Таблица 5.2

n	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000
x_n	2	2,25	2,37	2,44	2,49	2,59	2,70	2,717	2,718

Из табл. 5.2 видно, что члены последовательности возрастают, рост их замедляется, и они не превосходят числа 3. Доказано, что последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad n=1,\,2,\ldots$ монотонная и ограниченная, а значит, имеет предел.

Числом *e* называется предел $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Число $e \approx 2{,}7$ называют числом Непера[3]. Символ e для обозначения этого числа был введен в 1731 году Эйлером[4].

Можно показать, что к числу e стремится и функция действительного аргумента $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$.

Вторым замечательным пределом называется следующий предел

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.} \tag{5.2}$$

Второй замечательный предел можно записать и в другом виде, заменив $\dfrac{1}{x}=y$. Тогда $x=\dfrac{1}{y}$, причем при $x\to\infty$ величина $y\to 0$. Итак,

$$\boxed{\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.} \tag{5.3}$$

Второй замечательный предел раскрывает неопределенность $\left[1^\infty\right]$ и применяется при нахождении пределов показательно-степенных функций.

<u>*Пример 5.14*</u>. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{7x}$.

<u>*Решение*</u>. Очевидно, что имеет место неопределенность $\left[1^\infty\right]$. Преобразуем данный предел к виду второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{7x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{7x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{7\cdot\frac{3x}{3}} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{21} = e^{21}.$$

На экзамене профессор говорит нерадивому студенту: «Ваш ответ заслуживает оценки где-то между e и π ».

---

[3] Джон Непер (1550–1617) – шотландский барон, математик, один из изобретателей логарифмов, первый публикатор логарифмических таблиц.

[4] Леонард Эйлер (1707–1783) – швейцарский, немецкий и российский математик и механик. Автор более чем 850 работ.

<u>Пример 5.15</u>. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{-4x}$.

<u>Решение</u>. Покажем, что имеет место неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=1.$$

Преобразуем данный предел к виду второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{-4x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)+1}{x+1}\right)^{-4x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{-4x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{-4x\left(\frac{x+1}{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right)^{\frac{-4x}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-4x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+1}}=e^{-4}.$$

3. Непрерывность функций и точки разрыва

«Обывательский» критерий непрерывности – график непрерывной функции можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги.

Функция $y=f(x)$, определенная в точке x_0 и ее окрестности, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции $f(x)$ в точке x_0 существует и равен значению функции в этой точке, то есть

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{5.4}$$

Равенство (5.4) означает выполнение трех условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;
2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0;
3) этот предел равен значению функции в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Функция может иметь непрерывность только с одной стороны.

Функция $y=f(x)$ **непрерывна слева в точке** x_0, если она определена на полуинтервале $(a;x_0]$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$.

Функция $y=f(x)$ **непрерывна справа в точке** x_0, если она определена на полуинтервале $[x_0;b)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Очевидно, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке, то есть когда

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Таким образом, определение непрерывности функции в точке может быть сформулировано так:

Функция $y = f(x)$ **непрерывна в точке** x_0, если выполнены три условия:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;

2) существуют конечные левосторонние и правосторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

3) выполнено равенство $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Определение непрерывности функции может быть сформулировано и так:

Функция $y = f(x)$ **непрерывна в точке** x_0, если она определена в окрестности этой точки и бесконечно малому приращению аргумента Δx в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, то есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Пример 5.16. Доказать непрерывность функции $y = x^2$ в точке x.

Решение. □ Функция определена для всех $x \in R$. Зафиксируем произвольное x и дадим ему приращение Δx. Найдем приращение функции:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Найдем предел этого приращения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) = \lim_{\Delta x \to 0} (0 + 0) = 0. \ \blacksquare$$

Функция $y = f(x)$ **непрерывна на промежутке,** если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Точки разрыва и их классификация

Точкой разрыва функции $y = f(x)$ называется точка x_0, в которой функция не является непрерывной.

В точке разрыва будет нарушено хотя бы одно из условий определения непрерывности функции в точке. В зависимости от «величины» разрыва допускается следующая классификация.

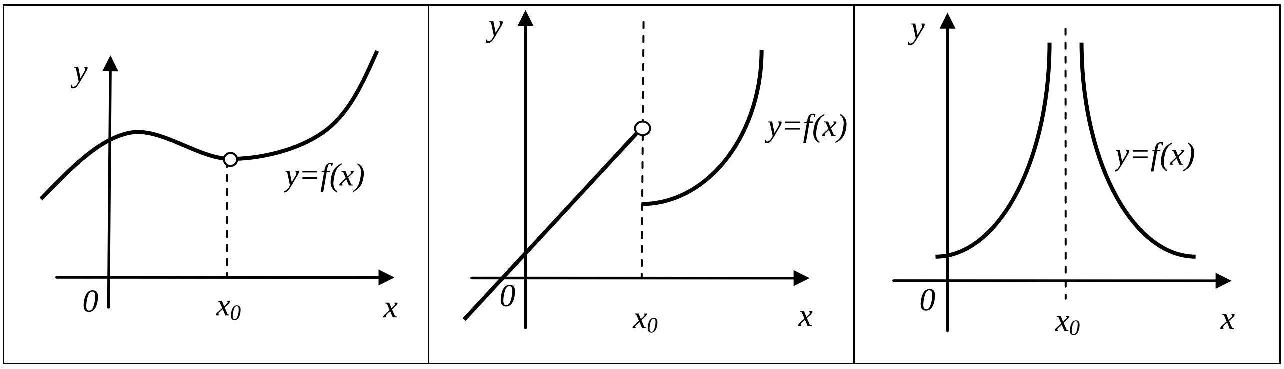
Точка разрыва x_0 называется:

1) **точкой разрыва первого рода** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы, причем если они:

а) равны, то x_0 называется точкой **устранимого разрыва**, то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$ (рис 5.9*а*);

б) различны, то x_0 называется **точкой неустранимого разрыва (скачок),** то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ (рис. 5.9*б*);

2) **точкой разрыва второго рода (бесконечный разрыв)** функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов не существует либо равен бесконечности (рис. 5.9*в*).



а б в

Рис. 5.9

Пусть $A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Краткая классификация точек разрыва приведена в таблице 5.3.

Таблица 5.3

Точка непрерывности	$A = B = f(x_0)$
Точка устранимого разрыва	$A = B \neq f(x_0)$
Точка скачка	$A \neq B$
Точка бесконечного разрыва	$A = \infty$ или $B = \infty$

Чаще всего разрыв возникает по двум причинам:

– функция задана различными выражениями на разных участках, и в граничных точках эти выражения имеют различные пределы;

– функция не определена в данной точке.

<u>*Пример 5.17*</u>. Исследовать функцию на непрерывность и построить график $f(x) = \begin{cases} x + 2, & если \quad x \le -1, \\ x^2 + 1, & если \quad -1 < x \le 1, \\ -x + 3, & если \quad x > 1. \end{cases}$

<u>*Решение*</u>. Область определения функции $D(f) = R$, поэтому все три части функции непрерывны на соответствующих интервалах. Проверим условия непрерывности только в двух точках «стыка» между кусками $x = -1$ и $x = 1$. Для каждой из двух «стыковых» точек проверяем 3 условия непрерывности.

Исследуем на непрерывность в точке $x = -1$.

1) $f(-1) = -1 + 2 = 1 -$ функция определена в данной точке.

2) найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} (x + 2) = 1;$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} \left(x^2 + 1\right) = 2.$$

Односторонние пределы конечны и различны, значит, функция $y = f(x)$ терпит разрыв первого рода (скачок) в точке $x = -1$.

Вычислим скачок разрыва как разность правого и левого пределов:

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) - \lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = 2-1=1$, то есть график рванул на одну единицу вверх.

Исследуем на непрерывность в точке $x=1$.

1) $f(1)=1^2+1=2-$ функция определена в данной точке.

2) найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \left(x^2+1\right) = 2;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (-x+3) = 2.$$

Односторонние пределы конечны и равны.

3) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = f(1) = 2.$

Таким образом, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=1$ (рис. 5.10).

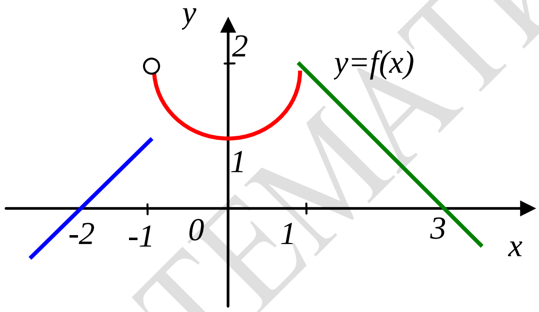


Рис. 5.10

Свойства непрерывных функций

Свойство 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x)\pm g(x)$; $f(x)g(x)$; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (если $g(x_0)\neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

Свойство 2 (*первая теорема Вейерштрасса*). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, то есть на отрезке $[a;b]$ выполняется условие $|f(x)|\leq M$.

Свойство 3 (*теорема Вейерштрасса*). Функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$, принимает на нем наибольшее M и наименьшее m значения, то есть $m\leq f(x)\leq M$.

Свойство 4 (*первая теорема Больцано – Коши*). Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения противоположных знаков, то внутри отрезка $[a;b]$ существует такая точка c, где $f(c)=0$.