Тема 6

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Лекция 6.1. Числовой ряд и его сходимость

П л а н

1. *Понятие числового ряда, его сумма и сходимость.*
2. *Необходимый признак сходимости числового ряда.*
3. *Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.*
4. *Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды, их сходимость по признаку Лейбница.*

Сумма бесконечного числа слагаемых называется рядом, а задача нахождения этой суммы решается в теории рядов. Если члены ряда:

– числа, то ряд называется **числовым**;

– числа одного знака, то ряд называется **знакопостоянным**;

– числа разных знаков, то ряд называется **знакопеременным**;

– положительные числа, то ряд называется **знакоположительным**;

– числа, знаки которых строго чередуются, то ряд называется **знакочередующимся**;

– функции, то ряд называется **функциональным**;

– x^n, $n \in N$, то ряд называется **степенным;**

– тригонометрические функции, то ряд называется **тригонометрическим.**

Ряды – один из инструментов вычисления различных значений произвольных функций.

1. *Понятие числового ряда, его сумма и сходимость*

Пусть задана бесконечная числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Числовым рядом или просто **рядом** называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{6.1}$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – **члены ряда**, a_n – **общий** или n-й член ряда.

Из членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ образуем числовую **последовательность частичных сумм** $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots,$
где $S_1 = a_1;\ S_2 = a_1 + a_2;\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3;\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$

Как известно, числовая последовательность может:

1) иметь конечный предел;

2) не иметь конечного предела (предел не существует или равен бесконечности).

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **сходящимся**, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S.$ Число S называется **суммой ряда**.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **расходящимся**, если последовательность его частичных сумм не имеет конечного предела. Расходящийся ряд не имеет суммы.

Пример 6.1. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots$ сходится и найти его сумму.

Решение. Каждое слагаемое ряда можно представить в виде:

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}; \qquad \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \qquad \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots, \ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Найдем n-ю частичную сумму данного ряда:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда имеем $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1.$ Следовательно, данный ряд сходится и его сумма равна 1.

Пример 6.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots$

Решение. Для этого ряда $S_1 = -1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = -1, \ldots,$ то есть после прибавления очередного слагаемого сумма становится равной то (-1), то 0. В этом случае предел последовательности частичных сумм не существует, и ряд расходится.

Эталонные числовые ряды

1. **Геометрический ряд** – это ряд вида

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + \ldots} \qquad (6.2)$$

Геометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \to \begin{cases} \textit{сходится} \quad \textit{и} \quad S = \dfrac{a}{1-q}, \quad \textit{если} \quad |q| < 1; \\ \textit{расходится}, \quad \textit{если} \quad |q| \geq 1. \end{cases}$$

2. **Гармонический ряд** – это ряд вида

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots} \qquad (6.3)$$

Гармонический ряд является расходящимся.

3. **Обобщенный гармонический ряд** – это ряд вида

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots} \qquad (6.4)$$

Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \to \begin{cases} \textit{сходится}, \quad \textit{если} \quad p > 1; \\ \textit{расходится}, \quad \textit{если} \quad p \leq 1. \end{cases}$$

Основные свойства числовых рядов

Свойство 1. Сходимость или расходимость ряда не изменится, если произвольным образом удалить из него, добавить к нему, переставить в нем конечное число членов.

Свойство 2. Сходящийся ряд можно умножать на число c, то есть если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет сумму S, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ тоже будет сходиться и иметь сумму cS.

Свойство 3. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, то есть если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны S_1 и

S_2 соответственно, то и ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$сходятся и их суммы будут равны $S_1 \pm S_2$.

2. Необходимый признак сходимости числового ряда

Теорема 6.1 (*необходимый признак сходимости ряда*). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел его общего члена равен нулю при неограниченном возрастании его номера, то есть

$$\boxed{\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.}$$

Нужно понимать, что это условие является необходимым, но недостаточным условием для сходимости ряда, то есть выполнение равенства $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ не гарантирует сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. К примеру, для гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ необходимое условие сходимости выполняется: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$ но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Таким образом, необходимый признак нельзя использовать для доказательства сходимости ряда, однако его можно использовать для доказательства расходимости ряда.

Следствие (*достаточный признак расходимости ряда*). Если предел общего члена ряда не равен нулю при неограниченном возрастании его номера, то этот ряд расходится, то есть

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится.}}$$

3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Теорема 6.2 (*первый признак сравнения).* Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, и выполняется условие $a_n \le b_n$ для всех *n*. Тогда:

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

<u>*Пример*</u> 6.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

<u>*Решение*</u>. Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, который, как доказано ранее, сходится. Поскольку $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} < \frac{1}{n(n+1)} = b_n$, то по первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ сходится, так как сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Теорема 6.3. (*второй признак сравнения*). Если для знакоположительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ существует предел отношения общих членов, отличный от нуля, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$, то ряды сходятся или расходятся одновременно.

<u>*Пример 6.3.*</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.

<u>*Решение.*</u> Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который является расходящимся. Найдем предел отношения общих членов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Следовательно, эти два ряда ведут себя одинаково. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ расходится, так как расходится взятый для сравнения эталонный гармонический ряд.

Замечание. Исследование ряда на сходимость или расходимость с помощью признаков сравнения не всегда удобно, так как сложно подобрать подходящий ряд. Поэтому возникает необходимость установить признаки, которые позволяли бы судить о сходимости или расходимости без привлечения вспомогательных рядов.

Теорема 6.4 (*предельный признак Даламбера*[1]). Пусть члены положительного ряда таковы, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l,$ тогда если:

1) $l<1,$ то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится;

2) $l>1,$ то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится;

3) $l=1,$ то о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ничего сказать нельзя, необходимы дополнительные исследования.

Замечание. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида $n!$ или a^n.

<u>*Пример 6.4*</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3^n}.$

<u>*Решение*</u>. Применим предельный признак Даламбера.

В нашем случае $a_n=\dfrac{n!}{3^n},\quad a_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}}.$

Тогда $$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\dfrac{n!}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=\infty>1,$$

следовательно, ряд расходится по признаку Даламбера.

Теорема 6.5. (*Предельный признак Коши*[2]). Пусть члены положительного ряда таковы, что существует предел

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l,$ тогда если:

1) $l<1,$ то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится;

2) $l>1,$ то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится;

---

[1] Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783) – французский математик, механик, философ, энциклопедист.

[2] Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик и механик. Его имя внесено в список величайших ученых Франции, помещенных на первом этаже Эйфелевой башни.

3) $l = 1$, то о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ничего сказать нельзя, необходимы дополнительные исследования.

Пример 6.5. Исследовать на сходимость

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$$

Решение. Применим признак Коши:

$l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$ следовательно, ряд сходится.

4. *Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды, их сходимость по признаку Лейбница*

Теорема 6.6 (*достаточный признак сходимости знакопеременных рядов*). Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Для знакопеременных сходящихся рядов различают два случая:

1) знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится;

2) знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

В связи с этими двумя случаями вводят следующие определения.

Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов. Знакопеременный ряд называется **условно сходящимся**, если он сходится, а соответствующий ему ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Частным случаем знакопеременных рядов является **знакочередующийся** ряд, когда любые два рядом стоящие члены имеют противоположные знаки. Такие ряды удобнее записывать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \quad (a_n > 0). \tag{6.5}$$

Для определения сходимости знакочередующихся рядов существует весьма простой достаточный признак.

Теорема 6.7 (*достаточный признак сходимости Лейбница*[3]). Если для знакочередующегося числового ряда выполняются два условия:

1) члены ряда, взятые по модулю, убывают, то есть $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$;

2) предел общего члена при неограниченном увеличении n равен нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то этот ряд сходится.

Пример 6.6. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Используя признак Лейбница, имеем:

1) члены ряда, взятые по модулю, убывают: $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \ldots$;

2) предел общего члена при $n \to \infty$ равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$.

Исходный ряд сходится. Выясним, сходится этот ряд абсолютно или условно. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right| = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots \quad \text{или} \quad 1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \ldots$$

Это обобщенный гармонический ряд, который расходится, так как $p = \frac{1}{2} < 1$. Следовательно, данный ряд сходится условно.

Следствие. Если знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ сходится, то его сумма не превосходит первого элемента, то есть $S \le a_1$.

Лекция 6.2. Степенной ряд и его область сходимости

План

1. *Понятие функционального ряда и его области сходимости.*
2. *Степенной ряд, радиус, интервал и область сходимости.*

[3] Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) – немецкий философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед.

1. *Понятие функционального ряда и его области сходимости*

Функциональный ряд – это ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x) + \ldots$$

Если положить $x = x_0$, где x_0 – некоторое число, то получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = a_1(x_0) + a_2(x_0) + \ldots + a_n(x_0) + \ldots,$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то x_0 называется **точкой сходимости функционального ряда**.

Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его **областью сходимости**. Область сходимости может состоять из одной точки, из нескольких точек, может быть интервалом, отрезком, всей осью и, наконец, может быть пустым множеством.

2. *Степенной ряд, радиус, интервал и область сходимости*

Из функциональных рядов особенно хорошо изучены и имеют большое применение **степенные** ряды, то есть функциональные ряды вида

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots,} \qquad (6.6)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – некоторые числа, называемые коэффициентами степенного ряда.

В общем случае, степенным рядом называется ряд, разложенный по степеням $(x - x_0)$, где x_0 – произвольное число.

Такой ряд имеет вид

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots} \qquad (6.7)$$

Теорема 6.8 (*о структуре области сходимости степенного ряда*). Областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ является интервал $(-R; R)$, к которому после дополнительного исследования могут быть присоединены точки $-R$ и R, где $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. В каждой точке интервала $(-R; R)$, ряд сходится абсолютно.

Геометрическая иллюстрация теоремы представлена на рис. 6.1.

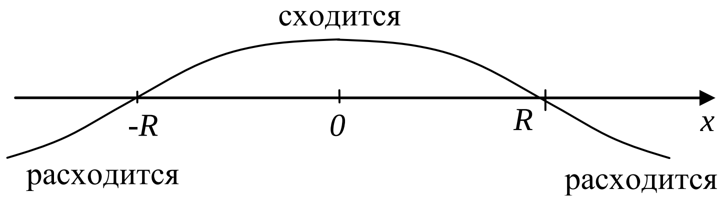

Рис. 6.1

Интервал $(-R; R)$ называется **интервалом сходимости** степенного ряда, а число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда.

Замечание. Любой степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = 0$. Если других точек сходимости у ряда нет, то считают, что $R = 0$. Если степенной ряд сходится во всех точках числовой прямой, то считают, что $R = \infty$.

Замечание. Интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Пример 6.7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Решение. Найдем радиус сходимости R. Для данного ряда $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, поэтому

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Следовательно, интервалом сходимости ряда является интервал $(-1; 1)$. Исследуем поведение ряда на концах полученного интервала, то есть при $x = \pm 1$. При $x = 1$ получаем обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $p = \frac{1}{2} < 1$, который расходится. При $x = -1$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, который сходится по признаку Лейбница. Таким образом, областью сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ является полуинтервал $[-1; 1)$.